

空力弾性角柱の非線形振動に関する研究

Study on Non-Linear Vibration of Aero-Elastic Model

山内 豊英*

要 旨

空力弾性角柱模型を用いた風洞実験による応答変位と、模型の復元力特性および減衰特性を非線形過程としてモデル化した時刻歴応答解析による応答変位とを比較・検討した。その結果、振動特性を線形過程として行った時刻歴応答解析では、実験結果に対して、振幅が大きくなると振幅の相違や位相のズレが生じたが、振動特性を非線形過程としてモデル化した時刻歴応答解析では実験結果をよりよく表現することがわかった。また、復元力特性の非線形性をモデル化した結果、最大振幅時における見かけ上の剛性は極わずかに減少するだけであったのに対し、応答変位の低周波数成分が著しく増加する現象が見られた。

キーワード：空力弾性角柱／風洞実験／非線形振動／減衰係数／ウェーブレット変換

1. はじめに

一般に、超高層建築物の風外力に対する応答解析には、スペクトルモード解析が用いられる。しかしながら、建築物の高層化および軽量化に伴い、解析に際して剛性や減衰等の振動特性の振幅依存性が無視できない建築物が出現しており、振動特性を線形過程と仮定するスペクトルモード解析だけでは不十分だと考えられる事例が増加している。そのため、振動特性の振幅依存性を考慮した時刻歴応答解析の必要性が指摘されている。

本研究では、空力弾性角柱模型（以下、弾性角柱と称す）を用いた風洞実験による実験結果と振動特性を線形過程とした時刻歴応答解析結果および振動特性の振幅依存性を考慮した時刻歴応答解析結果とを比較・検討し、振幅依存性が応答解析結果に与える影響について調べた。以下に、その検討結果を報告する。

2. 弾性角柱

本研究で使用した弾性角柱模型の概要を図-1に示す。模型は一辺100mmの正方形平面で高さ500mmの5層弾性角柱模型である。スラブおよび壁部分の材質はアクリルとした。柱は直径2mmの銅製丸棒を使用し、最下層のみ8本、他の層は4本の通し柱とした。風圧測定孔は側面4面に7列、それぞれ5点ずつ計140点設けており、それぞれの風圧測定孔をビニールチューブを介してマニフォールドに接続して風圧測定を行った。

3. 実験概要

実験は大阪市立大学工学部の噴流式エッフェル型風洞実験装置を用いて行った。実験装置の概要を図-2に示す。

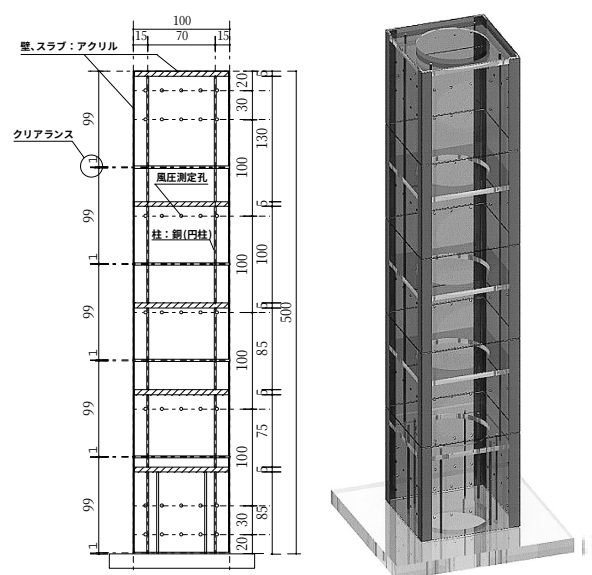


図-1 弾性角柱の概要

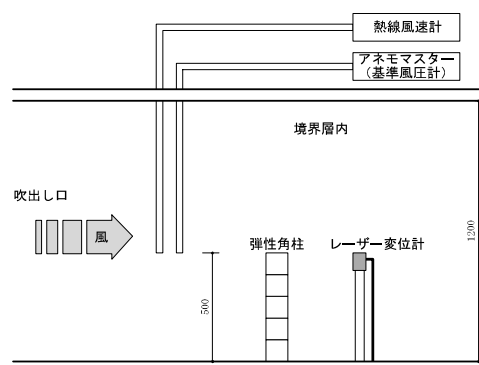


図-2 実験装置の概要

*建築構造研究室

実験気流は、べき指数 $\alpha=0.35$ の境界層乱流とした。模型頂部高さでの風速を基準とし、無次元風速で13.1まで増加させ、模型頂部の応答変位を2台のレーザー変位計により測定した。各風速でのサンプリング周波数は200 Hzとし、サンプリング時間は81.92秒とした。

4. 弾性角柱の振動特性

外力のパワースペクトル $S_p(f)$ と応答変位のパワースペクトル $S_x(f)$ との間には(1)式に示す関係がある。なお、 f は振動数である。

$$S_x(f) = |H(f)|^2 \cdot S_p(f) \quad (1)$$

ここで、 $|H(f)|^2$ はメカニカルアドミッタンスとよばれる伝達関数であり、(2)式のように表せる。なお、 K は剛性、 f_0 および ζ_c はそれぞれ固有振動数、構造減衰定数を表す。

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{K^2 \left[\left\{ 1 - \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 \right\}^2 + 4\zeta_c^2 \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 \right]} \quad (2)$$

(2)式において、 $f^2 = X$ とおくと、次の(3)式のようにになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{|H(f)|^2} &= K^2 \left[\left\{ 1 - \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 \right\}^2 + 4\zeta_c^2 \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 \right] \\ &= \frac{K^2}{f_0^4} X^2 + \frac{2K^2}{f_0^2} (2\zeta_c^2 - 1) X + K^2 \end{aligned} \quad (3)$$

ここで(3)式の各係数を(4)式のように置換し、(5)式のように変換する。

$$Y = \frac{1}{|H(f)|^2}, A = \frac{K^2}{f_0^4}, B = \frac{2K^2}{f_0^2} (2\zeta_c^2 - 1), C = K^2 \quad (4)$$

$$Y = AX^2 + BX + C \quad (5)$$

(5)式を用いて、模型の風圧測定結果から算定された1次一般化風力のパワースペクトル $S_p(f)$ および測定した頂部変位のパワースペクトル $S_x(f)$ による $S_p(f)/S_x(f)$ を近似する。 $S_p(f)/S_x(f)$ から得られる点 (x_i, y_i) を(5)式に代入した時、その誤差 ε_i の二乗総和は(6)式となる。

$$\sum_i \varepsilon_i^2 = \sum_i (Ax_i^2 + Bx_i + C - y_i)^2 \quad (6)$$

(6)式を A の二次式とみなすと、 ε_i を最小にするような A は(7)式を満たす。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum_i \varepsilon_i^2}{\partial A} &= \sum_i 2(Ax_i^2 + Bx_i + C - y_i)x_i^2 \\ &= \left(\sum_i x_i^4 \right) A + \left(\sum_i x_i^3 \right) B + \left(\sum_i x_i^2 \right) C - \sum_i x_i^2 y_i = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

同様に、 ε_i を最小にするような B および C の二次式から、(8)式を得る (N はデータの総数)。

$$\begin{bmatrix} \sum_i x_i^4 & \sum_i x_i^3 & \sum_i x_i^2 \\ \sum_i x_i^3 & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i x_i^2 y_i \\ \sum_i x_i y_i \\ \sum_i y_i \end{bmatrix} \quad (8)$$

(8)式により得られる A 、 B 、 C から、各風速における構造減衰定数、固有振動数、1次一般化剛性および1次一般化質量を算出する (図-3 参照)。

各風速における応答変位を風向方向は平均応答変位、風向直角方向は応答変位の標準偏差とし、それぞれに対する模型の構造減衰定数、固有振動数、1次一般化剛性および1次一般化質量の変化の様子を調べた。その結果を図-4に示す。構造減衰定数は応答変位の増加とともに増加する傾向にあり、固有振動数は減少する傾向にある。これについては、実在の構造物の傾向と一致する。しかし、図-4(d)にあるように、1次一般化質量が応答変位の変化とともに大幅に減少するような不合理な現象は考えにくい。このような結果が生じた原因として、伝達関数による評価に振動特性の線形過程を仮定していることが考えられる。一般化質量が変位振幅にかかわらず一定であるとする仮定および図-4(b)の振動数の結果を考慮すると、一般化剛性は応答変位の増加に伴い図-4(c)のように大幅に減少していくのではなく、わずかに減少していくはずである。

そこで以下では、復元力特性を非線形、構造減衰係数を速度依存成分と仮定してそれぞれについてモデル化を行い、それらを考慮した時刻歴応答解析によって、さらに詳細に風荷重下における構造物の応答性状について調べる。

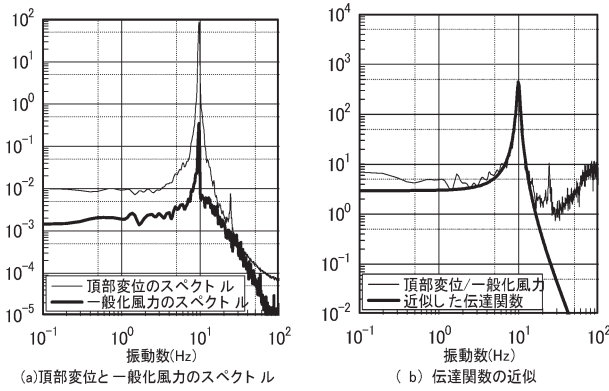


図-3 パワースペクトルおよび伝達関数

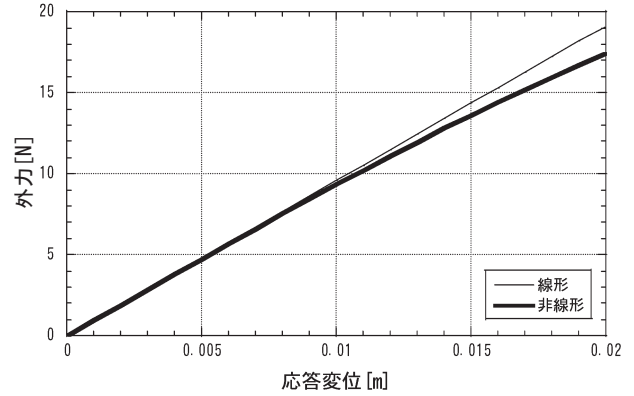


図-6 復元力特性

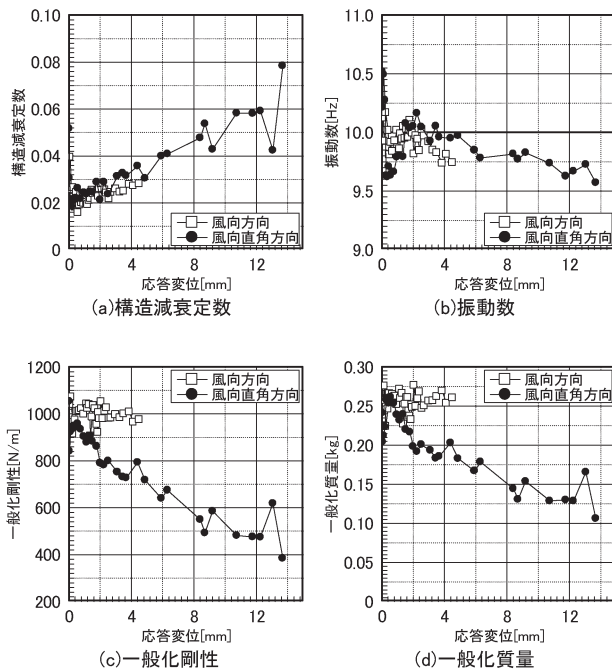


図-4 振動特性の変位振幅依存性

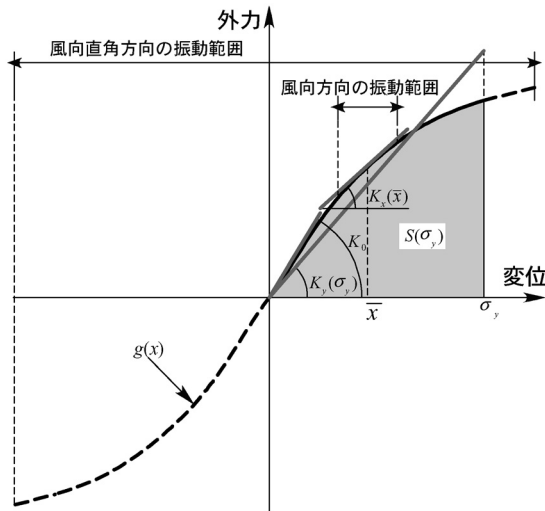


図-5 一般化剛性のモデル化概念図

5. 復元力特性のモデル化

弾性角柱の応答変位 x に対する復元力特性 $g(x)$ を風向方向、風向直角方向ともに(9)式のようにモデル化する。

$$g(x) = K_0 x - K_1 x^3 \quad (9)$$

風向方向の振動範囲が図-5に示すような範囲と考えられるため、平均変位 $\bar{x}$ に対する風向方向の一般化剛性 $K_x(\bar{x})$ は、その平均変位における接線剛性となり、(10)式となる。

$$K_x(\bar{x}) = \frac{d}{d\bar{x}} g(\bar{x}) = K_0 - 3K_1 \bar{x}^2 \quad (10)$$

一方、風向直角方向の振動範囲は図-5に示すような範囲と考えられるため、応答変位の標準偏差 σ_y に対する風向直角方向の一般化剛性 $K_y(\sigma_y)$ は、 $g(x)$ および変位軸で囲まれる面積 $S(\sigma_y)$ と等しい面積をもつ三角形の斜辺の傾きとみなす。したがって、一般化剛性は(11)式となる。

$$K_y(\sigma_y) = \frac{\int_0^{\sigma_y} g(x) dx}{0.5\sigma_y^2} = K_0 - 0.5K_1 \sigma_y^2 \quad (11)$$

(10)、(11)式中の K_0 は、風向方向における応答変位の平均値を横軸、一般化風力の平均値を縦軸としてプロットした風力-変位曲線の初期剛性として得られる。さらに、 K_x および K_y と変位振幅との関係が図-4(b)の振動数の変化に対応するように K_1 を求めた結果、 K_0 は957(N/m)、 K_1 は207500(N/m³)、また、一般化質量は0.243(kg)となった。この場合の復元力特性を図-6に示す。なお、本実験における風向方向の平均応答変位の最大値に対する K_x および風向直角方向の標準偏差の最大値に対する K_y は、 K_0 と比較して、それぞれ1.3%および2.0%程度減少することになる。

6. ウェーブレット変換を用いた構造減衰定数の評価

一般化変位 $x(t)$ の時刻 b におけるウェーブレット変換 $(W_\psi x)(a, b)$ は(12)式のように表される。 $\psi(t)$ は複素型の Morlet のウェーブレットで、 $\hat{\psi}(\omega)$ はそのフーリエ変換を示す (図-7 参照)。なお、* は複素共役を表し、 a はスケールファクターで対象とする周期を代表する。

$$\begin{aligned} (W_\psi x)(a, b) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{ab}^*(t) dt \\ \psi_{ab}(t) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \\ \psi(t) &= \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{i\Omega t} e^{-t^2/2} \\ \hat{\psi}(\omega) &= \sqrt[4]{\pi} \cdot e^{-(\omega-\Omega)^2/2} \end{aligned} \quad (12)$$

振動している模型の振幅 $|x|(a, b)$ は、(12)式のウェーブレット変換を用いて(13)式のように表される。

$$|x|(a, b) = \frac{|(W_\psi x)(a, b)|}{\sqrt[4]{a^2 \pi / 4}} \quad (13)$$

また、時刻 b における付加質量 $M_a(t)$ と空力減衰係数 $C_a(t)$ は一般化風力のウェーブレット変換 $(W_\psi f)(a, b)$ を用いて(14)式のように表される。

$$\omega_0^2 M_a(b) - i\omega_0 C_a(b) = \frac{(W_\psi f)(a, b) \cdot (W_\psi x)^*(a, b)}{|(W_\psi x)(a, b)|^2} \quad (14)$$

一般化質量 M と固有角振動数 ω_0 を用いると空力減衰定数 $\zeta_a(t)$ は(15)式のように表される。

$$\zeta_a(t) = \frac{C_a(t)}{2M\omega_0} \quad (15)$$

ここで、振幅 $|x|(a, b)$ は一般化変位の時系列波形に対する包絡線を描く。ある時刻 t の振幅を x_n 、 t から Δt 後の振幅を x_{n+1} とすると、時刻 t での減衰定数 $\zeta(t)$ は(16)式のように表される。

$$\zeta(t) = \frac{1}{\omega_0 \cdot \Delta t} \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} \quad (16)$$

(16)式に示す減衰定数 $\zeta(t)$ は(15)式に示す空力減衰定数 $\zeta_a(t)$ と模型の構造減衰定数 $\zeta_c(t)$ を足し合わせたものである。すなわち、(17)式のような関係がある。

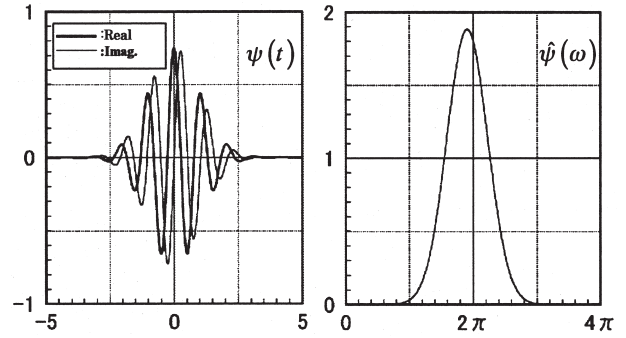
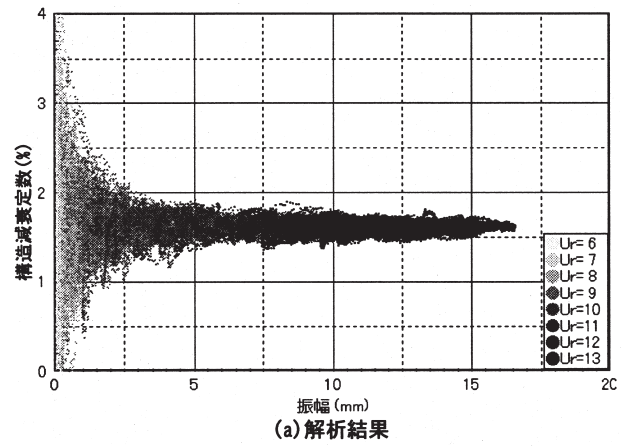
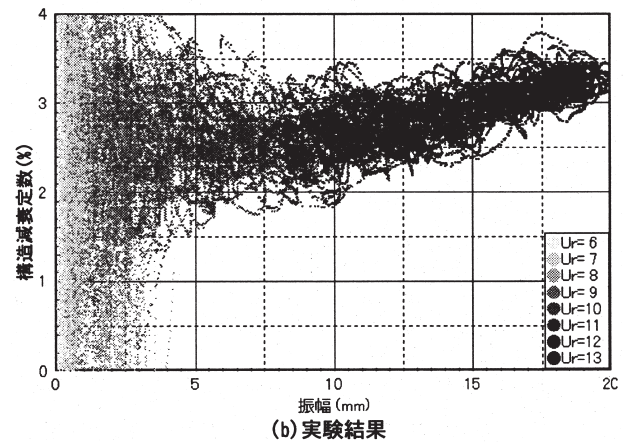


図-7 Morletのウェーブレット



(a) 解析結果



(b) 実験結果

図-8 構造減衰定数と振幅の関係 (Ur: 無次元風速)

$$\zeta(t) = \zeta_c(t) + \zeta_a(t) \quad (17)$$

したがって、(15)~(17)式より、模型の構造減衰定数のみを評価することが可能となる。

以上に述べた方法により評価した、時刻歴応答解析結果および実験結果における風向直角方向の構造減衰定数と変位振幅の関係を図-8に示す。時刻歴応答解析には「5. 復元力特性のモデル化」で示した初期剛性および

一般化質量を用い、また、減衰定数は一定値として1.7%を用いた。

図-8(a)の時刻歴応答解析結果によると、構造減衰定数は、振幅が小さい時はウェーブレット変換により算出される空力減衰が安定した値を得られないため大きくばらついた値となっているが、振幅が2.5mm以上になると入力した構造減衰である1.7%付近ではほぼ一定値をとっている。これはウェーブレット変換による構造減衰定数の評価が妥当であることを示している。一方、図-8(b)の実験結果によると、振幅の増加とともに構造減衰定数が増加していることがわかる。特に、振幅が10mmを超えると急激に増加し、ピーク付近では約3.3%まで上昇しており、明らかに構造減衰に振幅依存性があることがわかる。

7. 構造減衰係数のモデル化

図-8で示した構造減衰定数の各風速時の平均値を構造減衰係数の形で表したものを図-9に示す。図中の実線は、振幅 A の関数として構造減衰係数を $C(A) = C_0 + C_1 A^2$ の形で近似したものである。この C_0 および C_1 を用いて、構造減衰係数を速度 $\dot{x}$ の関数としてモデル化する。

質量を m 、バネ定数を k 、構造減衰係数を c 、作用する外力を f とした時の一質点系運動方程式を(18)式に示す。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f \quad (18)$$

(18)式の両辺に $\dot{x}$ を乗じて、両辺を x で積分する。

$$\begin{aligned} \int m\ddot{x}\dot{x}dt + \int c\dot{x}^2dt + \int kx\dot{x}dt &= \int f\dot{x}dt \\ \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int c\dot{x}^2dt + \frac{1}{2}kx^2 &= \int fdx \end{aligned} \quad (19)$$

(19)式の左辺2項目は減衰により消費されるエネルギーを表す。変位を $x = A \sin \omega_0 t$ 、固有周期を T とすると、振幅 A の関数とした構造減衰係数 $C(A)$ および速度 $\dot{x}$ の関数とした構造減衰係数 $C(\dot{x}) = a + b\dot{x}^2$ により1周期で消費されるエネルギーはそれぞれ(20)、(21)式のように表される。

$$\int_0^T C(A)\dot{x}^2dt = A^2\omega_0^2 C_0 \int_0^T \cos^2 \omega_0 t dt + A^4\omega_0^2 C_1 \int_0^T \cos^2 \omega_0 t dt \quad (20)$$

$$\int_0^T C(\dot{x})\dot{x}^2dt = A^2\omega_0^2 a \int_0^T \cos^2 \omega_0 t dt + A^4\omega_0^2 b \int_0^T \cos^4 \omega_0 t dt \quad (21)$$

(20)および(21)式は等しい関係にあることから、 a および b は(22)式のように定まり、 $C(\dot{x})$ は(23)式のように表される。

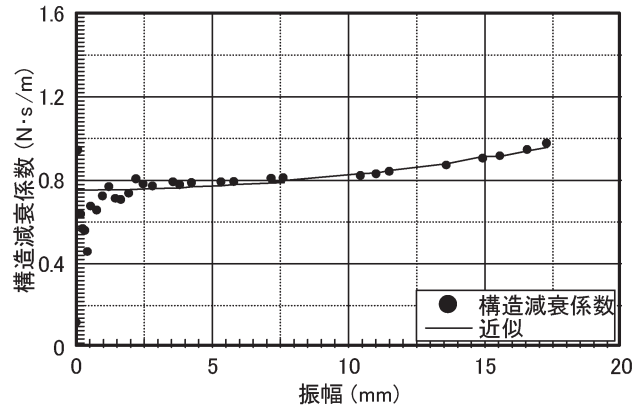


図-9 変位振幅に対する構造減衰係数の推移

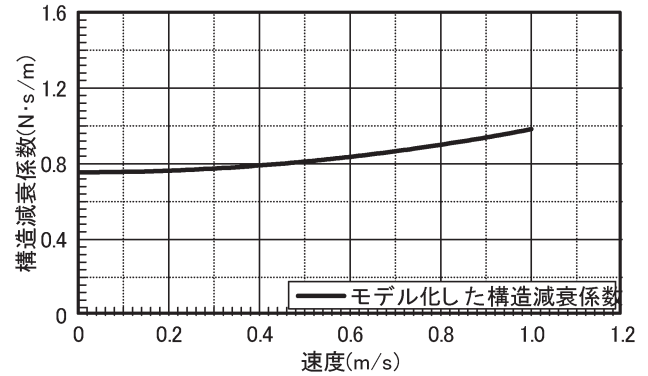


図-10 速度の関数としてモデル化した構造減衰係数

$$a = C_0, \quad b = \frac{C_1}{\omega_0^2} \cdot \frac{\int_0^T \cos^2 \omega_0 t dt}{\int_0^T \cos^4 \omega_0 t dt} = \frac{4}{3\omega_0^2} C_1 \quad (22)$$

$$C(\dot{x}) = C_0 + \frac{4}{3\omega_0^2} C_1 \dot{x}^2 = D_0 + D_1 \dot{x}^2 \quad (23)$$

なお、図-9の近似により得られる、 C_0 および C_1 から、 $D_0 = 0.754$ $D_1 = 0.228$ となり、速度 $\dot{x}$ の関数とした構造減衰係数 $C(\dot{x})$ は図-10のようになる。

8. 時刻歴応答解析および解析結果

時刻歴応答解析にはNewmark- β 法を使用し、 β 値を0.25とした。なお、解析は、①一般化剛性と構造減衰の双方とも初期値として一定値としたもの、②復元力特性のみを非線形過程とみなし構造減衰は初期値としたもの、③復元力特性と構造減衰の双方とも非線形過程とみなしたものの3種類について行った。

図-11に平均変位比を、図-12に変動変位比を示す。変位比とは模型頂部の変位を模型高さで除して無次元化したものである。■は実験結果、▲は①の解析結果、●は②の解析結果、○は③の解析結果を示す。なお、図中では、①の解析結果を「線形」、②の解析結果を「非線形(Kのみ)」、③の解析結果を「非線形」と表記しており、これらは以下の他の図中においても同様とする。

図-11平均変位比および図-12(a)風向方向の変動変位比はいずれも非線形による影響はほとんど見られず、概ね実験結果と一致している。一方、図-12(b)風向直角方向の変動変位比によると、①の解析結果では実験結果よりも小さくなっている。これと比較して、②の解析結果では振幅増加に伴う剛性低下を考慮していることから変動変位比は増加し、実験結果よりも大きくなっている。

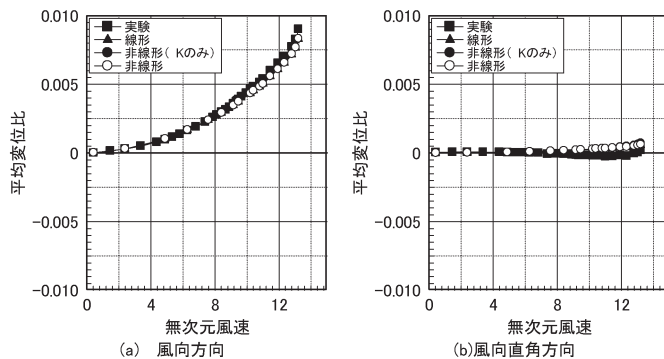


図-11 平均変位比

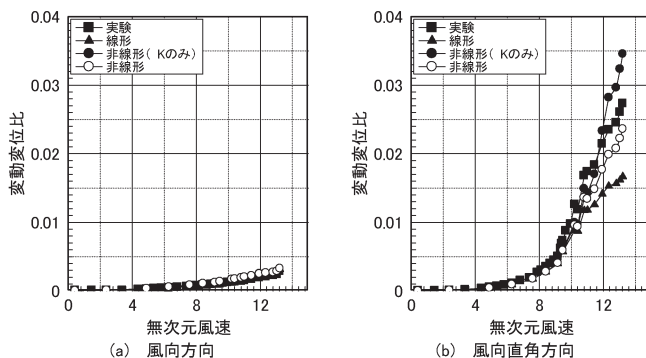


図-12 変動変位比

更に、③の解析結果では振幅増加に伴う構造減衰の増加を考慮していることから、実験結果をわずかに下回るものの、他の2解析と比較して実験結果をよく表している。

次に、無次元風速が7.6、10.2および13.1の時の風向方向における実験結果と時刻歴応答解析結果の応答変位の時系列波形を図-13に示す。風向方向の解析結果については変位振幅の絶対量が比較的小さい為、線形、非線形の違いは殆ど見受けられず、それぞれ実験結果をよく表している。

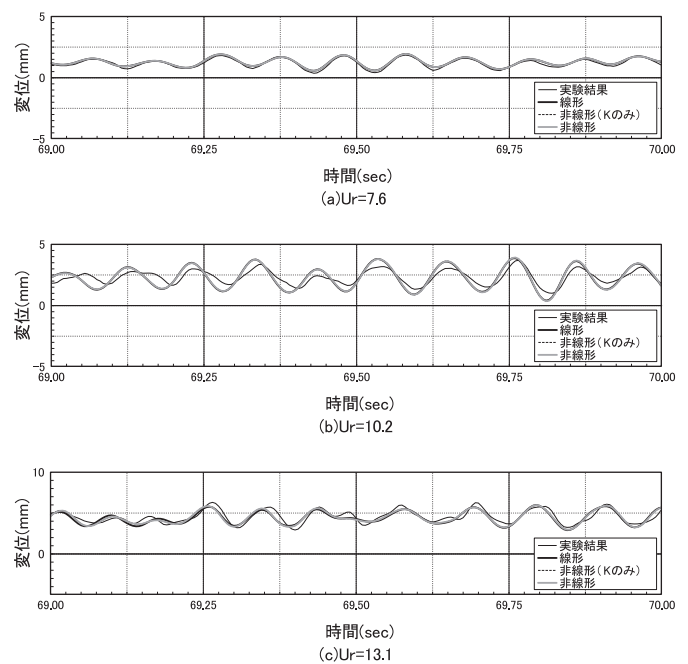


図-13 風向方向の応答変位の時系列波形

図-14に無次元風速が7.6、10.2および13.1の時の風向直角方向における実験結果と①の解析結果の応答変位の時系列波形を示す。これによると、変位振幅が大きくなるほど実験結果と解析結果に振幅の相違と位相のズレが生じていることがわかる。一方、図-15(a)の②の解析結果では実験結果との位相のズレが改善されており、さらに、図-15(b)の③の解析結果では振幅も改善され実験結果をよく表現している。

次に、実験結果と時刻歴応答解析結果の風向直角方向における応答変位のパワースペクトルを図-16に示す。無次元風速が7.6の時はそれぞれの結果がよく一致しており、非線形性の影響は見られない。一方、無次元風速が13.1で振幅が大きくなると、低周波数領域において実験結果および各種時刻歴応答解析との間に相違が見られる。①の解析結果と、③の解析結果は実験結果よりも小さな値を示しているのに対し、②の解析結果は実験結果

よりも大きな値を示しており、①の解析結果と比較して約10倍の値を示している。これは、線形過程であれば、剛性が1/3程度に減少することを意味する。しかし、前述の通り、見かけ上の一般化剛性 K_y はたかだか2%程度しか減少していない。すなわち、見かけ上の剛性変化が極わずかでも、応答の低周波数成分は著しく増加しており、このような現象は復元力特性の非線形解析における特有の現象ではないかと考えられる。

9. まとめ

- ・復元力特性および構造減衰の非線形性のモデル化を試みた。また、それらを考慮した時刻歴応答解析が実現現象をよく表現することがわかった。
 - ・ウェーブレット変換を用いた構造減衰の評価方法を試し、それが妥当であることがわかった。
 - ・復元力特性の非線形性を考慮して時刻歴応答解析を行った結果、見かけ上の剛性は極わずかに減少するだけであつたにもかかわらず、応答の低周波数成分が著しく増加した。このような現象は、復元力特性の非線形性が原因となり生じているのではないかと考えられる。
- 今後、見かけ上の剛性変化が応答の低周波数成分に与える影響を明確にすることが必要であると考えられる。

最後に、本研究を行うにあたり、多くの助言を頂いた大阪市立大学建築防災研究室・谷池義人教授・工博および谷口徹郎講師・工博、並びに、本研究のデータをまとめて頂いた（株）大林組の染川大輔氏（当時、同大学同研究室大学院生）に深く感謝いたします。

[参考文献]

- 1) Y.Tamura and S.Suganuma, Evaluation of amplitude-dependent damping and natural frequency of buildings during strong winds, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Vol.59, pp.115~130, 1996
- 2) 丸川比佐夫・片桐純治・勝村 章・藤井邦雄：多質点系弾性模型の開発と高層建築物の風応答評価についての検討、日本建築学会構造系論文集、pp.39~48、1996
- 3) 谷口徹郎・谷池義人：ウェーブレット変換を用いた非定常空気力の評価法、風工学シンポジウム論文集、pp.239~244、1998
- 4) 谷口徹郎・谷池義人・木内龍彦・肖武：角柱弾性模型を用いた非定常風圧に関する実測—その1 実測概要—、日本建築学会大会学術講演梗概集、pp.135~136、1999

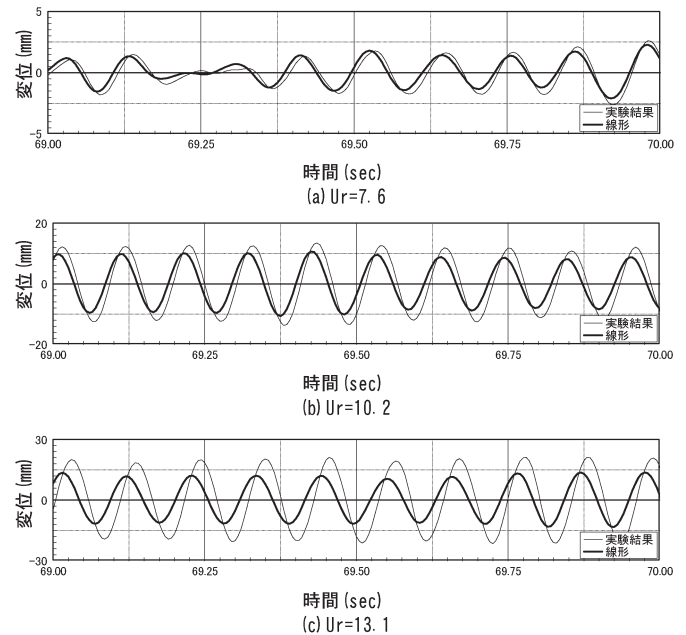


図-14 風向直角方向の実験結果と線形解析結果

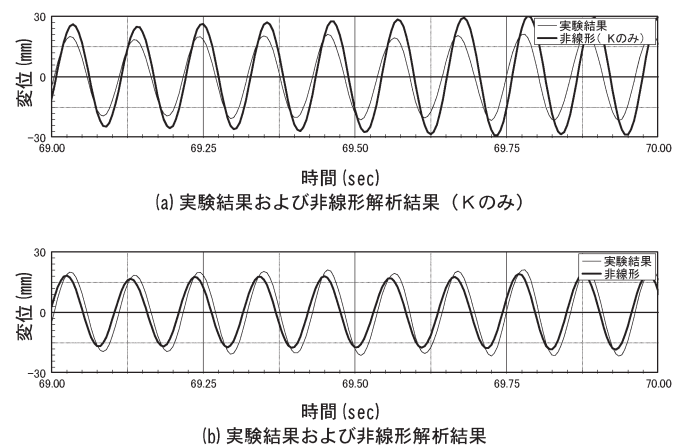


図-15 風向直角方向の実験結果と非線形解析結果

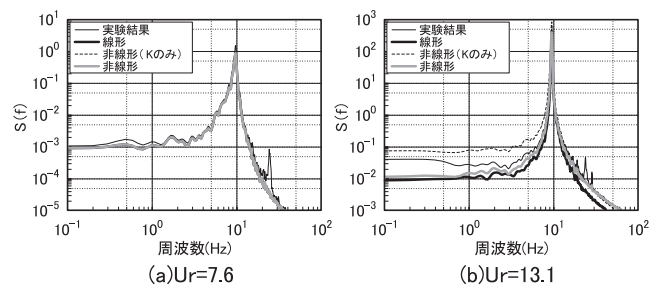


図-16 応答変位のパワースペクトル

