

4. 汎用有限要素法プログラムにおける ユーザ定義材料構成則ルーチンの設計と実装

Design and Implementation of User-defined Material Routine for FEM Application Program

森 浩二*

要 旨

コンクリート材料を対象とする非線形の有限要素解析を行なう場合、汎用のプログラムに備わる標準の材料モデルではコンクリート材料の特性を十分に表現できないため、ユーザ定義の材料ルーチンを組み込むことが必要となる。本研究では、コンクリート材料のモデル化の基礎として、ひずみ硬化を伴う弾塑性モデルと分散ひび割れモデルの2つを対象に材料ルーチンの設計と実装を行なった。さらに実装面における問題について検討を行い、実装に関する方針の提案を行なった。

キーワード：有限要素法／コンクリート／材料構成則／プログラム

1. はじめに

コンクリート材料で構成される構造物の非線形挙動の解析に対して有限要素法を適用するためには、コンクリートの非線形挙動を適切に表現するような材料構成則のモデルを数値表現として表記しなければならない。コンピュータの発達により、従来では計算量の点から困難であった複雑かつ大規模なモデルについても有限要素法による数値解析を行なうことが可能になった。また、有限要素法とそれに関連する数値解析の技術も発達し、非線形や動的な問題をも対象としたプログラムが市販のアプリケーションソフトウェアとして入手可能となっている。

これらの汎用ソフトウェアは多くの要素モデルや材料モデルをサポートしているが、サポート可能なモデルには限りがあり、特殊なモデルや未知のモデルは対象外となっている。しかし、ユーザ定義のサブルーチンと呼び出すしくみを備えているものが多く、そういったソフトウェアではユーザが独自のモデルを追加することが可能である。

本研究は、汎用の有限要素解析プログラムをプラットフォームとして想定し、ユーザ定義材料構成則ルーチンの作成手法について検討したものである。ここではコンクリート材料のモデル化に用いられることの多い弾塑性モデルと分散ひび割れモデルの2つの異なるモデルを対象として材料ルーチンの作成を行なった。両モデルの実装にあたっては材料ルーチン作成における統一的な手法の確立を目指した。以下にその経緯を述べる。

2. 有限要素法とコンクリート材料

2.1 有限要素法におけるコンクリート材料の扱い

有限要素法は歴史的に金属材料を取り扱う分野で先行して利用されており、建築の分野、特にコンクリート材料を取り扱う場面で利用されることは少ない。

金属系材料の非線形挙動については以前からその性質が良く研究されており、解析のレベルは実用的な域に達しているといわれている。また、ゴム・プラスチックなどの材料についても、その挙動の性質の複雑さにも関わらず、加工分野での需要が高いために多くの研究がなされ、高度な解析レベルに達している。

一方、コンクリートは粗骨材とモルタルからなる複合材料であるため、材料の不均質性と寸法依存性が本質的に存在する。これは連続体力学を基とする有限要素法を適用する上での大きな障害となっていた。さらに建築分野では、解析を必要とするほどの大規模な建築には柱・梁によるラーメン構造が主として採用されてきた。ラーメン構造の解析では柱や梁の部材としてのマクロな性質が解析に用いられることが多く、部材を構成する材料の詳細な性質が構造物の解析に用いられることは少なかった。柱や梁部材が単一のコンクリート材料ではなく鉄筋コンクリートという構造を持った構成要素で成り立っており、有限要素解析を行なう上でのモデル化が困難であったことも要因の一つである。

従来の鉄筋コンクリートのモデル、すなわちコンクリートが圧縮力を負担し鉄筋が引張力を負担するという素朴

*建築構造研究室

なモデルは直感的に理解しやすく計算が単純であるというメリットがあった。しかし、近年活発な研究が進められている高強度材料を用いた高軸力下の柱部材の実験では、このモデルと実験結果とが一致しなくなってきており、説明のためにせん断補強筋による拘束効果などが導入されている。これは従来の用いられてきた単純なモデルの延長線上で多軸応力下での鉄筋コンクリート部材の挙動を説明しようと試みたことによるひずみであり、従来と異なる条件下で使用されるような部材の解析に当たっては、材料力学の原点から問題を再構成することがより適切であると思われる。

2.2 材料モデルと有限要素法

有限要素法で用いられる材料構成則のモデルでは、外界に対する材料の挙動が応力とひずみの関係として抽象化される。この応力とひずみの関係は一般にマトリクスで表現される。例えば、線形弾性材料では応力 σ とひずみ ε の関係は $\sigma = D\varepsilon$ というマトリクスの演算によって記述することができ、応力-ひずみ関係 D は静的なマトリクスとなる。一方、非線形挙動を示し、かつ履歴を有する材料では応力とひずみの関係は微分形式を用いて次式のように記述される。

$$d\sigma = Dd\varepsilon \quad (1)$$

このときの応力-ひずみ関係 D は材料の状態によって変化するマトリクスである。具体的には、塑性やひび割れなどの内部状態を引数にとる関数として D が表される。

コンピュータによる数値演算では、微小なひずみ $d\varepsilon$ ではなく有限の大きさを持ったひずみ $\Delta\varepsilon$ を取り扱わなければならない。したがって、式(1)は次式のような積分を行った状態で用いられる。

$$\Delta\sigma = \int_{\Delta\varepsilon} Dd\varepsilon \quad (2)$$

応力-ひずみ関係 D が材料の状態によって変化するマトリクスである場合、式(2)の積分を行うのは一般に困難であるため、数値積分によって実際の計算を行う。

2.3 コンクリートの材料モデル

主として金属材料の解析の分野で発展した弾塑性材料の解析の手法を、コンクリート材料にも適用しようとする立場から、コンクリート材料における破壊曲面の定義やその形状に関する研究が広く行われてきた。これらは一軸圧縮や二軸圧縮の最大応力時までの実験結果をよく再現することができたが、応力の低下するひずみ軟化領域を表現することが困難であった。

一方、コンクリートに発生するひび割れそのものをモ

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{断塑性材料モデル} \\ \text{ひび割れ材料モデル} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{離散ひび割れモデル} \\ \text{分散ひび割れモデル} \end{array} \right.$$

図-1 コンクリートの解析に用いられる材料モデル

デル化しようとする立場があり、有限要素解析の分野でもひび割れをモデル化する試みが数多く行われている。これらはひび割れの取り扱いに対する考え方の違いによって離散ひび割れモデル (discrete crack model) と分散ひび割れモデル (smeared crack model) とに分類することができる。簡単にいうと、離散ひび割れモデルはコンクリートのひび割れそのものを有限要素法の要素としてモデル化しようとする試みであり、分散ひび割れモデルは離散的なひび割れを一様に分布する仮想的なひび割れに置き換えてモデル化しようとする試みであるといえる。

コンクリートの有限要素解析に用いられるモデルの分類を図-1に示す。

3. 材料ルーチンの設計方針

3.1 概要

ルーチンの設計にあたってはそのインターフェースだけではなく、上位のプログラムからどのようなコンテキストで呼び出されるかを考慮しなければならない。ここでは非線形有限要素解析プログラムの内部でどのように処理が行なわれるか、そしてその処理の中で材料ルーチンがどのように呼び出されるかについて述べた後、材料ルーチンのインターフェースと内部の設計方針について説明を行なう。

3.2 有限要素法の処理の流れ

図-2に有限要素法プログラムが、超弾性材料 (hyperelastic material) から構成されるモデルについて計算する場合の一般的なフローチャートを示す。太線部で囲った部分が材料ルーチンによる処理が行なわれる箇所である。

全体剛性マトリクス K は次式のように材料の接線剛性マトリクス D を各要素毎に積分したマトリクスの和として作成される。ここで B は形状関数を表し、 n は積分点 (通常 Gauss point と呼ばれる) の個数を表す。

$$K = \sum_i^n B_i^T D_i B_i \quad (3)$$

材料が各積分点について塑性やひび割れなどの固有の状態を持つ場合、式(3)での材料の接線剛性マトリクス D は、各積分点 i について対応する材料ルーチンを呼び出すことにより求められる。

また、増分解析ではそれぞれの荷重ステップについて不釣合力が0に収束するまで繰り返し計算を行う。不釣

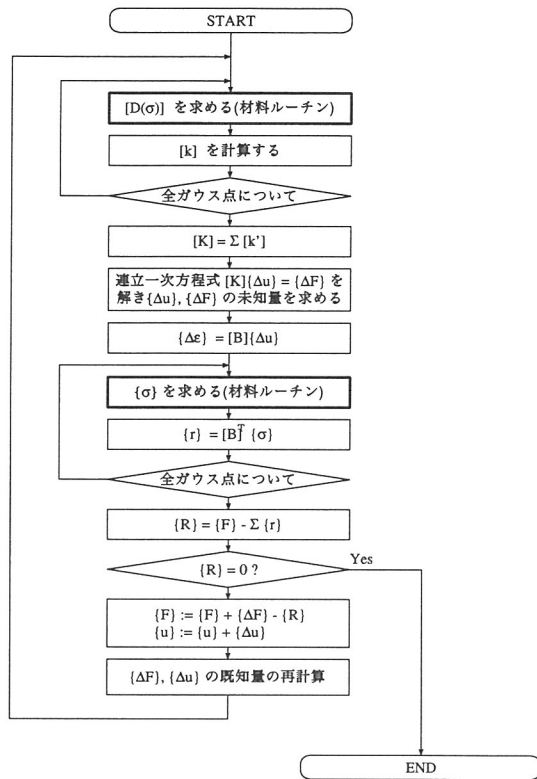


図-2 非線形有限要素解析のフローチャート

合力の計算には各積分点における応力増分が用いられる。この応力増分は式(2)の関係式を用い、材料ルーチンによって計算される。

3.3 インターフェースとプログラム言語

有限要素解析プログラムとその組み込み材料ライブラリ、ユーザ定義の材料ルーチンとの関係を図-3に表した。材料ルーチンのインターフェース部分は有限要素解析のプログラム側によって定義されるため、一般に対象とする有限要素解析プログラムによってそのインターフェースは異なる。したがって、材料ルーチンの構成を特定のプログラムに依存しないデザインとするために、呼び出し側のプログラムと作成する材料ルーチンとの間にスタブを設け、呼び出し側のプログラム間でのインターフェースの違いを吸収できるようにした。

ルーチンを記述するプログラム言語にはCを採用した。データ構造に関する表現力が高いこと、他の言語で記述されたオブジェクトとのリンクが容易であること、使用する人口が多いことなどが採用の理由である。

スタブと内部側の材料ルーチンは配列または構造体のポインタを渡すことによって変数の受渡しを行なう。応力やひずみの表現には配列を用い、材料の内部状態を表す変数（材料変数）の表現には構造体を用いた。内部材料ルーチンのインターフェースは入力をひずみ・応力・材料変数の3つ、出力を応力の変化量・材料変数の変化

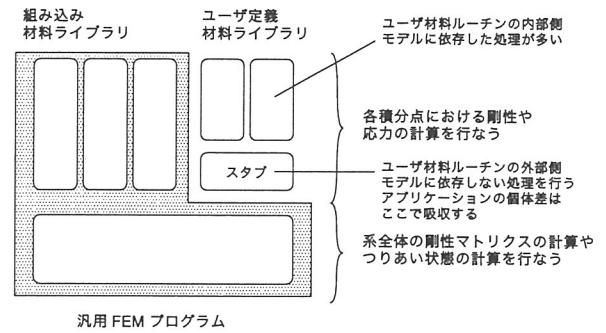


図-3 汎用有限要素解析プログラムとユーザ定義ルーチンの関係

量・接線剛性の3つとし、インターフェースが材料モデルに依存しないようにした。

3.4 材料ルーチンの内部構成

実装にあたって留意したのは材料モデルに依存した部分と依存しない部分との分離である。材料モデル依存部のフレームワークが適切であれば、材料モデルを実装する際に新規に設計しなければならない箇所を減らすことができ、コーディングの期間短縮やバグの削減に繋げることができる。実際のコーディングに際しては使用する言語の記述の自由度によって制約を受ける。使用言語の制約によってコードを共有することが困難なケースについても、命名規則を統一することによって共通の概念であることが識別できるように配慮した。

4. 材料ルーチンの実装

4.1 概要

ここでは実装の対象とした弾塑性モデルとひび割れモデルのそれぞれについてモデルの定義を行なった後、モデルに依存するルーチン内部の処理の概要とモデルに依存しないコーディング例について述べる。

4.2 弾塑性モデル

弾塑性材料モデルの実装に当たっては Drucker-Prager の基準に等方硬化を組み合わせたモデルを用いた。Drucker-Prager の基準は、静水圧が高くなるのにもなって強度が増すという性質を持った材料を表現できるように von Mises の降伏条件を拡張したものである（式4）。図-4に Drucker-Prager の基準を meridian plane 上に表した。

$$f = \sqrt{J_2} - \alpha I_1 + k \quad (4)$$

I_1 : 応力の第1普遍量
 J_2 : 偏差応力の第2不変量
 α, k : 材料モデルのパラメータ

一軸圧縮強度試験から得られた応力-ひずみ関係から相当応力-相当塑性ひずみ関係を算出し、これをひずみ硬化の計算に用いる。材料の初期状態は初期ヤング係数と

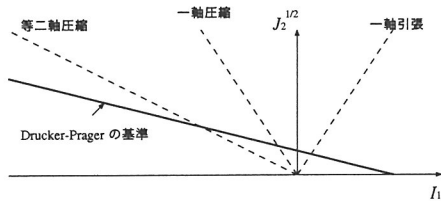


図-4 Meridian planeにおけるDrucker-Pragerの基準と載荷経路

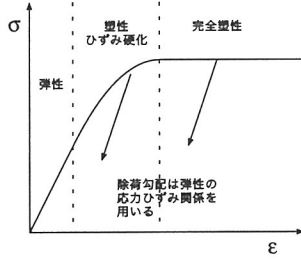


図-5 弾塑性モデルの応力-ひずみ関係

ポアソン比より決定される線形弾性体とした。初期降伏条件を満たした後は降伏関数と流れ則、適合条件 (consistency condition) より導かれる次式によって弾塑性の応力-ひずみ関係 D_{ijkl}^{ep} が求められる。

$$D_{ijkl}^{ep} = D_{ijkl}^e - \frac{1}{h} \phi_{ij} \phi_{kl} \quad (5)$$

ただし、 D_{ijkl}^e は弾性の応力-ひずみ関係を表す 4 階のテンソルであり、 h 、 ϕ_{ij} は以下の式で表されるスカラー、テンソルである。

$$h = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{1}{\sigma_e} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_e^p} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij}$$

$$\phi_{ij} = D_{ijkl}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}$$

f : 降伏関数, g : 塑性ポテンシャル,

σ_{ij} : 応力テンソル, σ_e : 相当応力, ε_e^p : 相当塑性ひずみ

終局状態 (完全塑性時) における応力-ひずみ関係では式(5)の h は

$$h = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}}$$

となり、除荷の際には弾性の応力-ひずみ関係となる (図-5)。ひずみ硬化を伴う弾塑性材料での状態遷移を取り扱う処理のフローチャートを付図-1に示す。

4.3 ひび割れモデル

分散ひび割れモデルは要素中に発生した有限個のひび割れによる変位を要素全域に広がる仮想的なひび割れひずみとして取り扱うというアイデアに基づくモデルである。ひび割れの発生条件には Rankin の最大引張り強

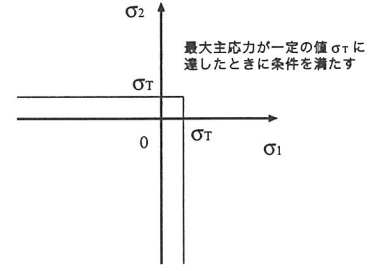


図-6 Rankinの最大引張応力基準

度基準を用いた (図-6)。引張軟化曲線は直線形状とし、応力-ひずみ関係の下り勾配は破壊エネルギー G_f から求められるようにした。 G_f は実験によって求められるものとされている。ひび割れが発生し、拡大している時の応力-ひび割れひずみ関係は次式とした。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_n^{cr} \\ \varepsilon_r^{cr} \\ \varepsilon_s^{cr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E^{cr} & 0 & 0 \\ 0 & G^{cr} & 0 \\ 0 & 0 & G^{cr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_r \\ \sigma_s \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ここでひび割れひずみ ε^{σ} 、応力 σ の下付きの添字 n はひび割れ面に垂直な方向の成分を表し、 r, s はひび割れ面に平行な 2 方向の成分を表す。また、 E^{cr} は破壊エネルギー G_f によって次式のように求められる。

$$E^{cr} = -\frac{\sigma_T^2 L}{2G_f}$$

σ_T : ひび割れ発生時の垂直応力, L : 要素の長さ

ひび割れ部分のせん断伝達を表現するパラメータである G^{cr} については実験例が少なく、値を決定するための定説が存在しない。ここではひび割れ幅の拡大によって G^{cr} の大きさが減少する様に、以下の関数を採用した。

$$G^{cr} = \frac{\beta}{1-\beta} G^{co}$$

$$\beta = \begin{cases} 1 - 0.8 \frac{\varepsilon_n^{cr}}{\varepsilon_{n,u}^{cr}} & (\varepsilon_n^{cr} < \varepsilon_{n,u}^{cr}) \\ 0.2 & (\varepsilon_n^{cr} \geq \varepsilon_{n,u}^{cr}) \end{cases}$$

G^{co} : コンクリートのせん断弾性係数

ε_n^{cr} : ひび割れひずみの垂直成分

$\varepsilon_{n,u}^{cr}$: 終局ひび割れひずみ

全体座標系に対するひび割れの座標軸の向きはひび割れの発生条件を満たしたときに求められる (図-7)。ひび割れ発生時の最大主応力がひび割れ座標系における n 軸となり、その他の 2 軸 (s, t 軸) は全体座標系の第 1 軸、第 2 軸周りの座標軸の回転の合成として表現されるアルゴリズムにしたがって求められる。

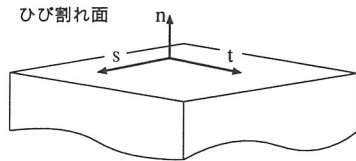


図-7 ひび割れ座標系の定義

除荷の定義は、ひび割れ面に垂直な方向のひび割れひずみが減少する場合とした。除荷時のひび割れ剛性 E'' は、応力-ひび割れひずみ関係の原点に向かう様に、載荷から除荷に転じた時点の応力とひび割れひずみから求める。

ひび割れモデルの状態遷移を取り扱う部分のフローチャートを付図-2に示す。

4.4 弾塑性モデルとひび割れモデルにおける共通処理

材料ルーチンには採用するモデルに依存しない処理や、共通するアルゴリズムが出現する。プログラミング言語の表現力における制約上の理由や性能上の理由などによりこれらの共通部分をすべて共通のコードとして記述することは得策ではない。しかし、そのような場合にもコーディングスタイルを統一することによって概念が共通であることを表現することが望ましい。本ルーチンでは処理の目的を抽象化し、モジュール化することによってコードの共有化を図った。

弾塑性モデルとひび割れモデルは材料モデルとしての基本的な考え方に違いがあるため、両者に共通な処理は主に数値計算上の処理に関わる部分となった。

(1) ひずみ経路の分割

材料ルーチンに入力として与えられたひずみ増分の経路の過程で材料の状態遷移が生じる場合、状態が変化する前後にひずみ増分を分割して応力増分を計算することになる。この処理のフローチャートを図-8に示す。

(2) 分割点の決定

ひずみ増分の経路が材料の状態が同一である領域を逸脱する場合、領域の境界とひずみ増分の経路が交わる点を決定する必要がある。通常用いられる材料モデルでは材料状態の領域は応力空間上に定義されることが多い。したがって、応力-ひずみ関係を用いてひずみ増分を応力空間に投影した場合、その経路は一般に非線形となる。投影した応力の経路は応力-ひずみ関係をひずみ増分の経路に沿って積分したものであり、連続性があるため、Newton-Raphson 法やはさみうち法による収束計算を行なうことができる。Drucker-Prager の基準を降伏関数とした弾塑性モデルでは、降伏関数をそのまま収束計算に使用することができる。ひび割れモデルでは、最大引張強度基準を拡張してひび割れひずみの履歴をパラメータ

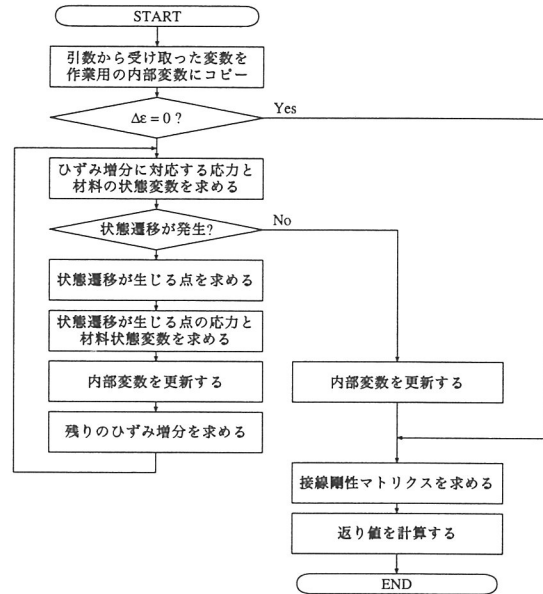


図-8 ひずみ経路のフローチャート

としてとるようにした。

(3) データ構造

材料ルーチンでは応力やひずみの他に、材料状態を表すさまざまな量を取り扱わなければならない。応力やひずみは材料モデルに依存しない量であるが、材料状態は取り扱うモデルによって取り扱うべき異なるパラメータの種別や個数が異なる。

ここでは材料変数をモデルのタイプによってグループ化し、リスト-1のようなCの構造体として定義した。異なるモデル間に共通した処理を同一のコードとするため、共通部では材料変数の内容に対する直接操作を行わず、構造体のポインタの参照のみを取り扱うようにした。共通部で扱う材料変数はリスト-2のように void 型の変数として宣言される。材料変数の内容に対する参照や操作は全てモデル依存部で行われ、そこでは引数として渡された void 型のポインタを実際の構造体に対するポインタにキャストしてから処理が行われる(リスト-3)。このように共通部とモデル依存部での名前空間を分離することによって、コードの部分的な再利用ではなく、ソースファイル単位での共有が可能となっている。

5. コーディングと計算結果

弾塑性モデルとひび割れモデルのルーチンのコーディング結果について、共通部分・モデル依存部のコードの行数の比較を表-1に示す。共通部分と総コードのうち、行列演算部分を除いたものを括弧内に示した。両モデルとも全体のコードの量は同程度であり、行列演算部を除くと約20%のコードが完全に共有化されている。

```
typedef struct cr_material {
    int status;
    double crack_direction[3];
    double crack_initial_stress;
    double crack_normal_strain_max;
    double crack_normal_strain;
    double fracture_energy;
    double element_length;
    el_material_t *elastic;
} cr_material_t;
```

リストー1 材料変数の構造体宣言の例

```
typedef void he_material_t;
void he_condition_copy(he_material_t *dst,
    he_material_t *src);

リストー2 構造体の型宣言と関数プロトタイプ宣言の例

void
he_condition_copy(he_material_t *dst,
    he_material_t *src)
{
    el_material_t *el;
    cr_material_t *cr_dst = (cr_material_t *)dst;
    cr_material_t *cr_src = (cr_material_t *)src;
```

リストー3 関数定義の例

表ー1 材料ルーチンの共通コードの比較

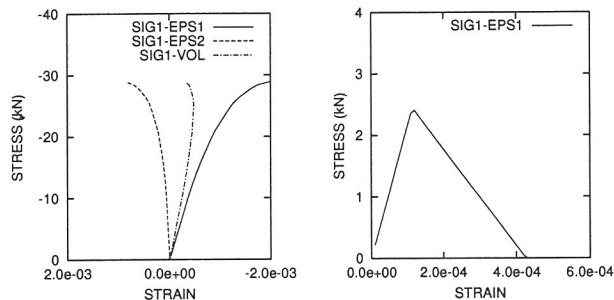
	相違	共通	総コード
弾塑性モデル	768	793(233)	1561(1001)
ひび割れモデル	844	793(233)	1637(1077)

図ー9(a)は弾塑性モデルの計算例である。ひずみ硬化のキャリブレーションには、Kupfer によるコンクリートの一軸圧縮試験の結果を用いた。載荷経路はコンクリートの一軸圧縮試験を想定し、特定の1軸方向にのみ負の応力を加え、その他の2方向は応力が0となるようにひずみ増分を与えた。図中 SIG1-VOL が応力と体積ひずみの関係である。塑性の進行にともない体積が増加している様子が現れている。

図ー9(b)はひび割れモデルの計算例である。載荷経路は一軸引張試験と同様になるようにした。図中、応力ーひずみ関係を表す線と応力が0の線とで三角形に囲まれた部分の面積が破壊エネルギー G_f に比例する。

6. おわりに

有限要素法においてコンクリート材料を取り扱う場合、弾塑性モデルやひび割れモデルがよく用いられる。その他にもコンクリート材料に特化した、より精密な解析モデルが幾つか提案されているが、これらは汎用の有限要



(a) 弾塑性モデル (b) 分散ひび割れモデル

図ー9 応力ーひずみ関係の計算結果

素解析プログラムと直ちに組み合わせて利用できるわけではない。したがって、コンクリート材料を弾塑性材料として取り扱ったり、ひび割れを仮想的なひずみとみなして取り扱う手法は、コンクリートに特化した特殊な解析手法に比べて、既存の有限要素解析のプログラムを容易に利用できるという利点があり、拡張性に富んでいるといえる。

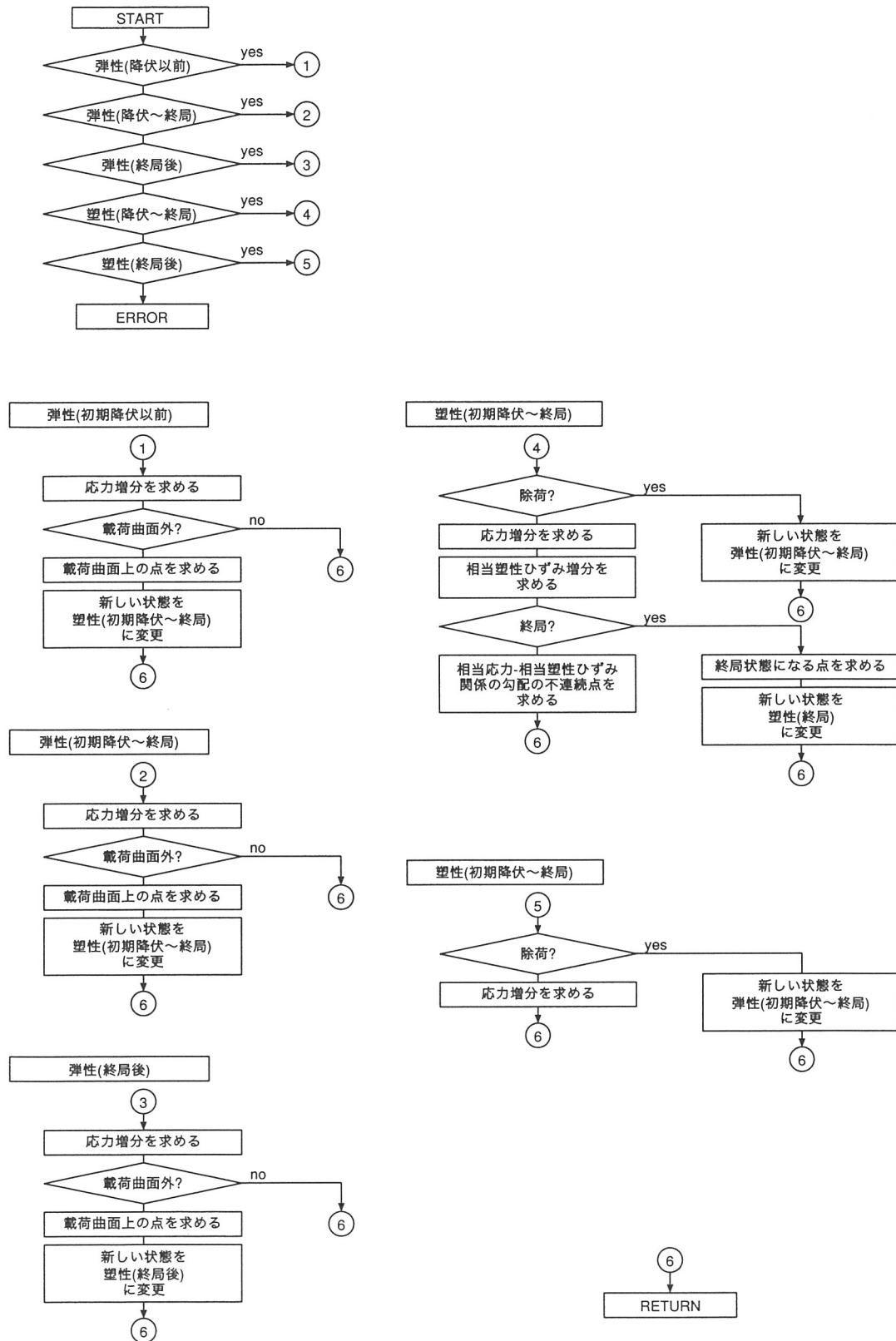
ここでは、汎用の有限要素法プログラムに組み込むための前段階として2つの比較的シンプルなモデルによる材料構成則ルーチンのコーディングを行なった。さらに、数値計算とコーディング上の問題点について整理と検討を行い、材料モデルの効率的な実装手法についての基本的なアイデアを示した。今後、新たな材料ルーチンを実装することや、有限要素法プログラムに組み込むことによって手法の改善を行なっていく予定である。

[謝 辞]

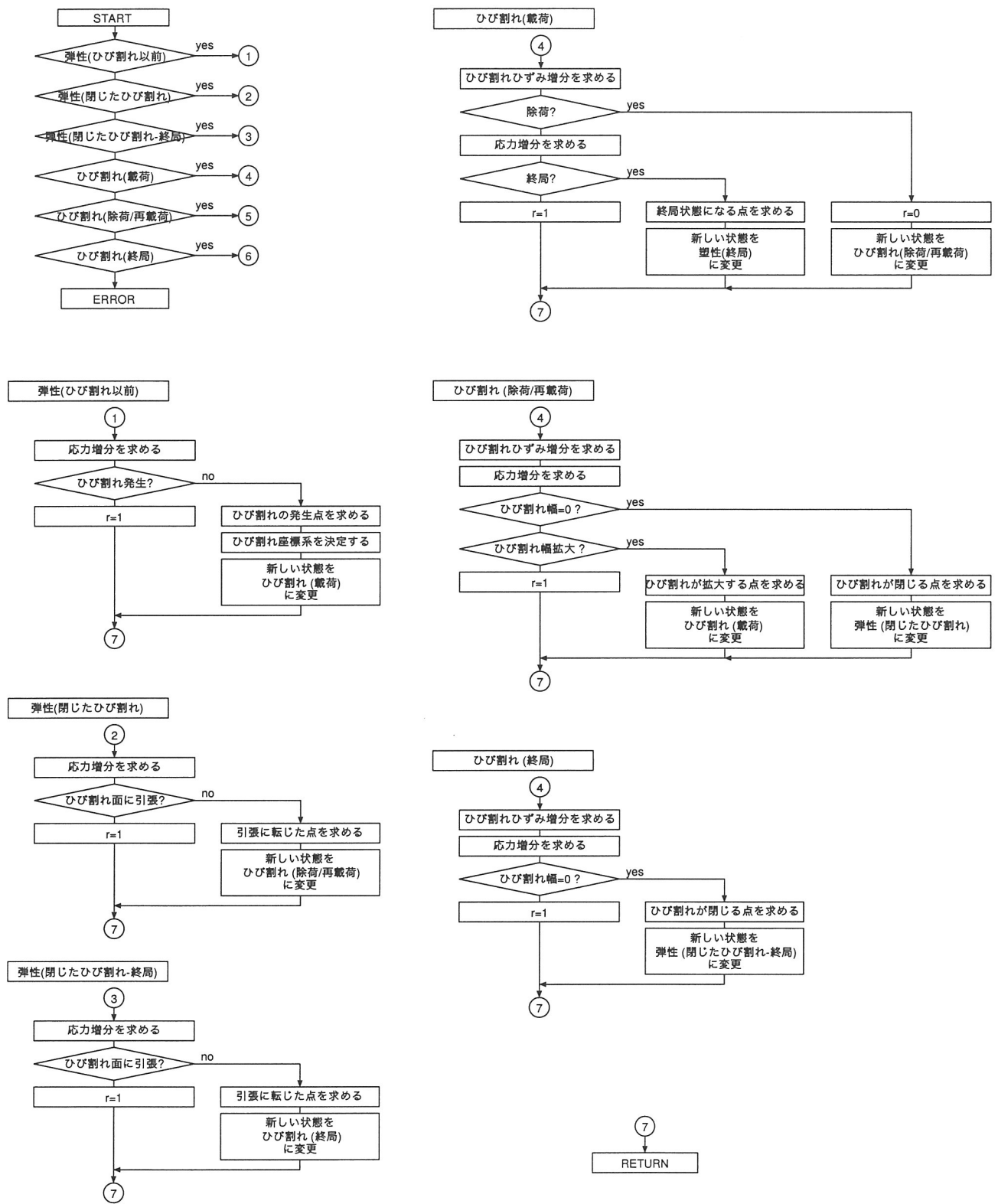
本報告は筆者が神戸大学受託研究員、およびJCI近畿支部「コンクリート構成則の応用研究委員会」委員として、1998年から2年間にわたり活動を行なった成果をまとめたものである。研究およびプログラムの作成にあたっては神戸大学工学部建設学科大谷恭弘助教授に多岐にわたるご指導をいただきました。ここに感謝の意を表します。

[参考文献]

- 1) H.Kupfer : Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses, 1969.
- 2) W.Chen : Constitutive Equations for Engineering Materials, 1994.
- 3) J.G.Rots : Crack Models for Concrete, HERON Vol.34, 1989.
- 4) 土木学会 : 材料特性の数値演算モデル入門, 1989.
- 5) オーム社 : 数値計算ハンドブック, 1990.



付図－1 弾塑性材料モデルの状態遷移



付図-2 ひび割れモデルの状態遷移