

13. 剛塑性有限要素法による土構造物の安定解析

高稲 敏浩

要 旨

実務設計において有限要素法による変形計算が普及する一方で、土構造物全体の安定性の検討には円弧すべり法など従来の手法による事が多く、有限要素法を用いた手法については多く知られていない。本報告では、地盤全体の安定解析や地盤の支持力解析を容易に行える剛塑性有限要素法を種々の地盤に適用した解析例を報告する。

キーワード

剛塑性有限要素法／支持力／安定解析／角度不変条件

目 次

1. はじめに
2. 剛塑性有限要素法
3. 補強材のある地盤の剛塑性有限要素法による安定解析
4. ま と め

13. STABILITY ANALYSIS OF SOIL STRUCTURES USING RIGID-PLASTIC FINITE ELEMENT METHOD

Toshihiro Takaine

Abstract

Deformation computation using FEM is widely practiced during final design operation. Meanwhile, as the stability of soil structures is chiefly investigated by circular arc method, little is known about a method using FEM. This paper explains “rigid-plastic FEM” that facilitates analytical operation of soil bearing capacity and stability analysis of soil structures. The paper also reports on actual cases of application of “rigid-plastic FEM” to various soil structures.

1. はじめに

ここ数年におけるワークステーションの飛躍的な性能の向上および急速な普及は、実務計算においてもかなり複雑な問題まで扱うことを可能にしている。近接施工あるいは軟弱地盤等の施工条件の厳しい現場においては、有限要素法による地盤の弾塑性圧密変形計算を用いて、事前に変形あるいは沈下量の検討がなされることはもはや珍しいことではなくなった。これは、かつては大型計算機でのみ実行可能であった複雑な境界条件下での有限要素計算がワークステーションでも比較的簡単に実行できるようになり、実務設計においても成果をあげつつある例である。実務面において土構造物の変形予測と同様に安定性の検討も重要な課題であるにもかかわらず、有限要素法を用いた変形計算が普及する一方で、安定性を検討する手法についてはそれほど多くは知られていない。従来、最も多く行われている有限要素法による安定性の検討手法は、増分変形計算によって土構造物中の塑性域の分布や各要素での部分的な安全率を求めることで構造物全体の安定性を議論しようというものであるが、構造物全体の破壊を論ずるには課題が多い。

一方、初期の変形には目をつぶり破壊のみを議論する場合には、金属塑性加工の分野で生まれた剛塑性有限要素法が威力を発揮する。本報告では、変形解析では困難な地盤の支持力問題や安定解析を容易に熟す、この剛塑性有限要素法の説明を行い、同時にワークステーションで行った種々の境界条件の計算例を報告する。

2. 剛塑性有限要素法

2.1 概説

剛塑性有限要素法は、田村ら(1984)¹⁾によって明快な数学的構造を与えられて導入された。一方、浅岡ら^{2,3)}は剛塑性有限要素法に土の構成式を導入し「水-土骨格連成極限解析」を提案し、土の異方性あるいは、排水条件を考慮できる解析を可能にした。安定解析において、本当の意味での有効応力解析に成功した例はこれ以外には未だ見当たらない。本章では、剛塑性有限要素法の誘導について簡単に述べ、それを用いた支持力、安定解析の計算例を示す。

2.2 剛塑性有限要素法の定式化

まず、極限解析には欠かせない塑性論の上界定理に

ついて説明する。上界定理は、運動学的に可容な速度場（すなわち剛塑性境界値問題において適合条件を満足する速度場）の中から、外力系による外部仕事と等値された塑性エネルギーの消散率を最小化するものを探索した場合、その最小値を与える外力系は真の崩壊荷重を下回ることではないことを教えている。数学的にはその外力系が極限つり合い式を満たす正解値であることは証明されているが、速度場を仮定する場合その自由度によっては正解値よりも大きな値が得られることになる。これを、有限要素に離散化して数値解析するのが剛塑性有限要素法である。

上界定理の理解を深めるため、斜面安定計算に用いている円弧すべり法を例題にしてみる。円弧すべり法は、地盤の崩壊メカニズム（速度場）を円弧に近似し、その円弧（速度場）に沿ってせん断強度を積分したものの（すなわち塑性エネルギー消散率）と外部仕事の比率（ここでは安全率）を最小化する円弧（速度場）を探索する手法であり、まさしく上界定理そのものである。円弧すべり法は単なるモーメントのつり合い計算であると思われがちであるが、視点を変えれば非常に力学的に意味の深い手法であることがわかる。剛塑性有限要素法は、円弧よりもより自由度を大きくして計算していると考えれば、ある程度の理解の助けになるだろう。では、剛塑性有限要素法を、定式化した結果を示すと以下ようになる。

$$\int_V B^T s dV + L^T \lambda + \mu \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$L \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (2)$$

$$\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{u}} = 1 \quad (3)$$

また、限界状態における構成式にミーゼス材を用いると、式1は以下ようになる。

$$\sigma_0 \int_V \frac{B^T Q B}{\bar{e}} dV + L^T \lambda + \mu \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (1')$$

記号の説明

- B : ひずみ速度～節点変位速度マトリックス
s : 各要素での偏差応力ベクトル
L : 体積ひずみ速度～全節点変位速度マトリックス
λ : 各要素での平均応力
F : 全節点力ベクトル
 $\dot{\mathbf{u}}$: 節点変位速度ベクトル
 σ_0 : ミーゼス定数
Q : 工学ひずみ速度を純粋ひずみ速度に変換するマトリックス
 $\dot{\mathbf{e}}$: 相当塑性ひずみ速度

式(1)は、極限状態での力のつり合い式(極限つり合い式)である。左辺のFは外力であり、 μ は現在の荷重Fの何倍で破壊に至るかを表しており安全率に相当する。式(1)でFを自重とみれば、斜面安定などの自重で壊れる問題となり、Fを表面力とすれば、表面力で壊れる問題となり柔軟な荷重(盛土など)に対する支持力が求まる。また、構造物の基礎すなわち硬い基礎の支持力を考える場合は、地盤と基礎の接する部分の土は押込まれようとする方向へ同じ変位速度を有することになり、以下の様に定式化される。

$$\int_V B^T s dV + L^T \lambda = C^T \mu \quad (4)$$

$$L \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (5)$$

$$C \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_0 \quad (6)$$

式(4)も極限つり合い式である。

記号の説明

- C : 支持力を求める節点の変位速度を取り出すマトリックス
 $\dot{\mathbf{u}}_0$: 支持力を求める節点に与える変位速度
 μ : 支持力を求める節点で求められる荷重ベクトル

ここで、土の構成則(カムクレイモデルや関口・太田モデル)を用いての定式化も可能である。次節では、浅岡らの研究による実際の数値計算例を示す。

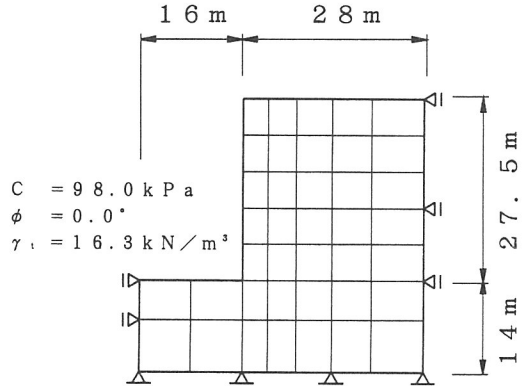


図-1 解析メッシュおよび土質条件

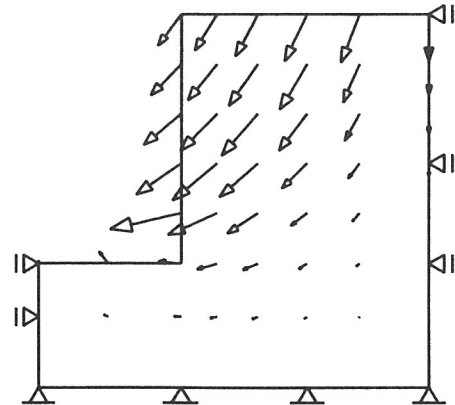


図-2 変位速度場

2.2 数値計算例

(1) 斜面安定

図-1に示すような境界条件で安定解析を行ってみる。この場合は、自重で壊す問題に相当する。その時の変位速度場を、図-2に示す。破壊領域は、ほぼ円弧の形をしていることが分る。Terzaghiの安定係数Nsを比較してみる。Chenによる理論解が、3.82、剛塑性有限要素法による安全率は0.92、Nsは4.30となり、ほぼ一致している。

$$\text{安定係数: } N_s = \frac{\gamma \cdot H_c}{C} \quad (7)$$

γ : 単位体積重量

H_c : 斜面の高さ

C : 粘着力

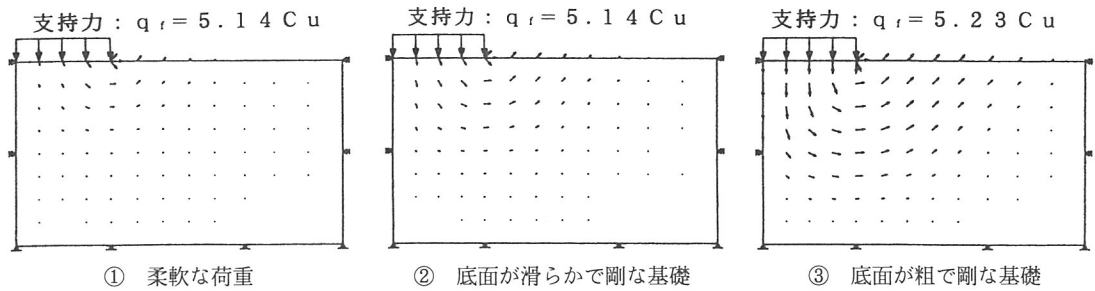


図-3 載荷条件による変位速度場の違い

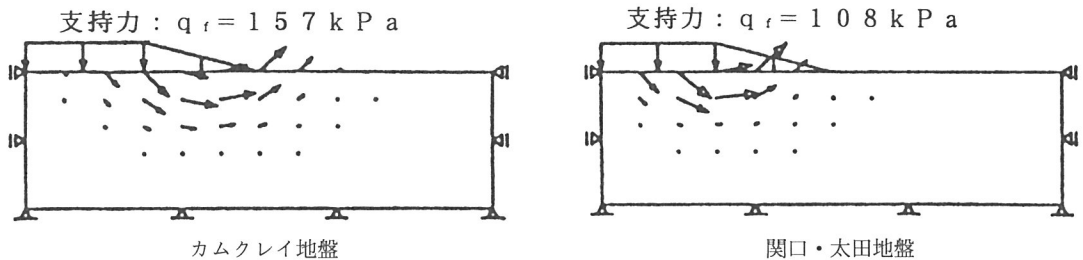


図-4 変位速度場

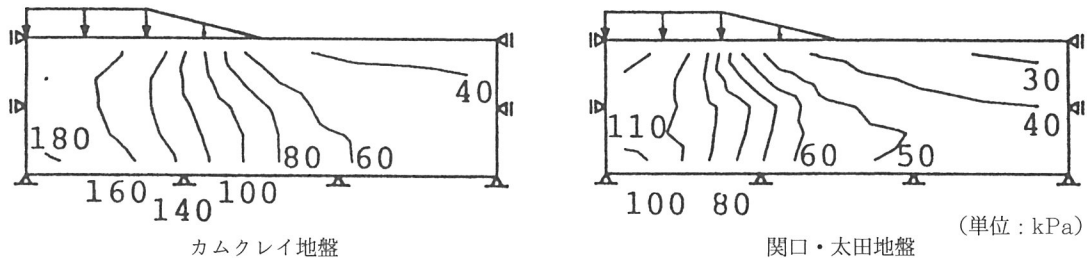


図-5 破壊時過剰間隙水圧分布

(2) 載荷条件の違いによる速度場と支持力

前節で述べた「柔軟な (flexible) 荷重」、「硬い (rigid) 基礎」における載荷の支持力と変位速度場の相違を均一な粘性土地盤で見みる。解析結果を図-3に示す。①は柔軟な荷重を載荷した場合、②は底面が滑らかな硬い基礎を載荷した場合、③は底面が粗で硬い基礎を載荷した場合である。Prandtlによる正解値は $(\pi + 2) Cu$ であるのでほぼ正解値を得ることができる。Cuは、非排水強度である。③の場合、支持力が少し大きくなっている。変位速度場を比較してみると、③の場合の変位速度が、地盤内部まで生じ破壊領域が大きくなっていることから、深さ方向に地盤強度が大きくなるような地盤では、さらに大きな支持力を期待できる。

(3) 等方性地盤と異方性地盤の支持力

土の限界状態における構成則にカムクレイモデルと関口・太田モデルを用いて、等方性地盤と異方性地盤の支持力を比べる。変位速度場とその時の間隙水圧分布を図-4、図-5に示す。変位速度場を見ると分るように等方性地盤では盛土の法尻で、異方性地盤では盛土の内部の方にすべりが生じていることが分る。また、当然のことであるが、等方性地盤のほうが支持力は大きくなっている。

以上、(1)~(3)のように種々の境界条件や地盤条件においても剛塑性有限要素法を用いることで、地盤の安定や支持のメカニズムを簡単に明らかにできることが分る。

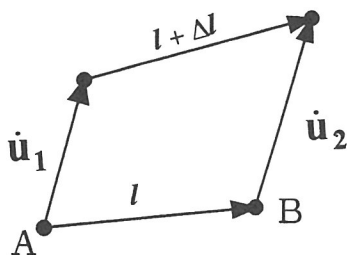


図-6 距離不変条件

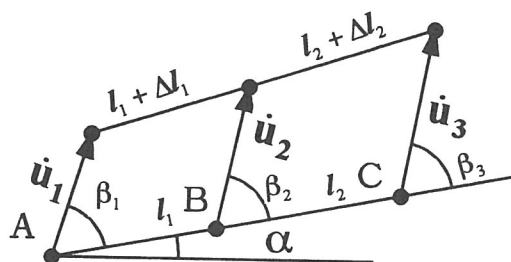


図-7 角度不変条件

3. 補強材のある地盤の剛塑性有限要素法による安定解析

3.1 概説

前章では、地盤が土要素のみの安定解析について述べた。この章では、地盤中に補強材と呼ばれるもの（鋼、コンクリート、テキスタイルなど）が存在する場合の安定解析について述べる。まず、補強材は土にどのように作用して地盤の安定性を高めているのかを次のように考える。すなわち、補強材はそれに接する土を拘束するように働き、その拘束力の反力として補強材に軸力や曲げモーメントが発生すると考える。この現象は、地盤の中だけで生じている土と補強材の相互の作用によるものであるから、前章で述べた極限つり合い式の中に組込まれるべき「内力」である。そこで、本報告では「補強材は、それに沿う土要素の距離あるいは、土要素間の角度を変えないように作用する。」と仮定し、この仮定のもとに有限要素メッシュ中の補強材の位置に対応する各節点の速度場に「距離不変」「角度不変」の条件を課し、それを剛塑性有限要素法に導入して安定解析を行う。したがって、破壊時の地盤内で補強材が発揮する軸力あるいは曲げモーメント、は、その制約条件を満たす「内力」として現れ、同時に変位速度場および安全率を求めることができる。

剛塑性有限要素法は、破壊領域を事前に決定しておく必要がなく極めて合理的な手法といえる。次節以降その定式化と計算例を示す。

3.2 計算手法⁴⁾

(1) 距離不変条件

ジオテキスタイル等の補強材を用いる場合が、この条件に相当する。この条件の定式化を簡単に示す。

図-6 に示すように補強材に接する微小土要素A, Bを考える。破壊の時もA-B間の距離が不変であると

する。

$$|l| = |l + \Delta l| \quad (8)$$

上式を展開し微小項を無視してx, y成分に分解すると以下になる。

$$(l_x, l_y, l_x, l_y) \cdot (\dot{u}_{1x}, \dot{u}_{1y}, \dot{u}_{2x}, \dot{u}_{2y})^T = 0 \quad (9)$$

この制約条件を剛塑性有限要素法に導入した場合、次式の極限つり合い式を得る。

$$\int_V B^T s dV + L^T \lambda + C_t^T \nu + \mu F = 0 \quad (10)$$

Ct: 式(10)の制約条件をつくるマトリックス

ここで、新たに加わったパラメータνは距離不変条件より発生する「力」であり、補強材の張力に相当する。

(2) 角度不変条件

土中の「硬いもの」例えば、鋼やコンクリートを挿入した場合が、この条件に相当する。この条件は、前述の距離不変条件を前提として成立しており、以下に定式化の手順を示す。図-7に示すように、補強材に接する微小土要素A, B, Cを考える。破壊の時もこのA, B, Cのそれぞれの角度は変わらないものとする。補強材に平行な成分は、距離不変条件より

$$|\dot{u}_1| \cos \beta_1 = |\dot{u}_2| \cos \beta_2 = |\dot{u}_3| \cos \beta_3 \quad (11)$$

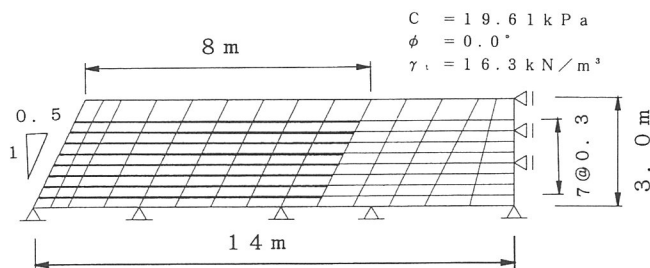


図-8 解析メッシュ及び土質定数

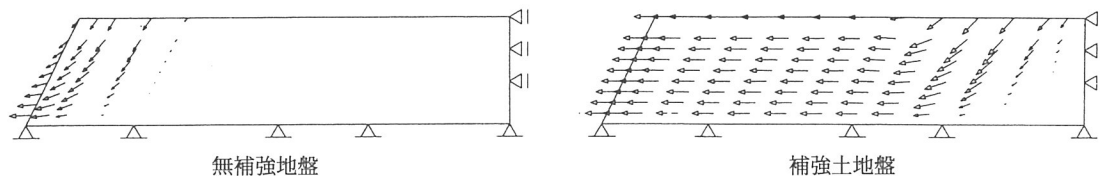


図-9 変位速度場

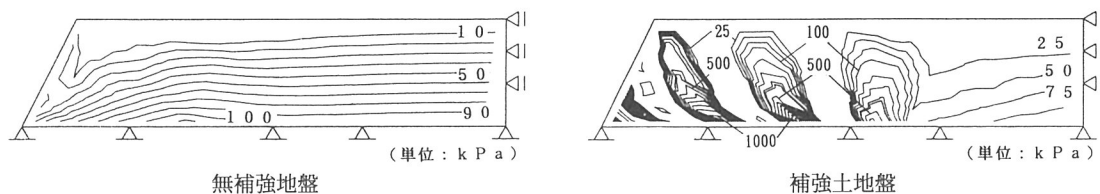


図-10 破壊時の平均応力分布

となり、角度が不変という条件は以下になる。

$$\begin{aligned} |l_1| : (|\dot{\mathbf{u}}_2| \sin \beta_2 - |\dot{\mathbf{u}}_1| \sin \beta_1) \\ = |l_2| : (|\dot{\mathbf{u}}_3| \sin \beta_3 - |\dot{\mathbf{u}}_2| \sin \beta_2) \end{aligned} \quad (12)$$

上式を変形し x , y 成分で表すと以下になる。

$$\begin{aligned} (l_{2y}, -l_{2x}, -(l_{1y} + l_{2y}), (l_{1x} + l_{2x}), l_{1y}, -l_{1y}) \\ \cdot (\dot{\mathbf{u}}_{1x}, \dot{\mathbf{u}}_{1y}, \dot{\mathbf{u}}_{2x}, \dot{\mathbf{u}}_{2y}, \dot{\mathbf{u}}_{3x}, \dot{\mathbf{u}}_{3y})^T = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

この制約条件を剛塑性有限要素法に導入した場合のつり合い式は以下になる。ここで、角度不変条件は、距離不変条件を前提としているので距離不変条件も同時に導入される。

$$\int_V B^T \mathbf{s} dV + L^T \lambda + C_t^T \nu + C_b^T \xi + \mu \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (14)$$

C_b : 式 (13) の制約条件をつくるマトリックス

ここで、新たに加わったパラメーター ξ が角度不変条件より発生する「力」である。補強材が曲ろうとす

るのに対して抵抗する力であり、曲げモーメントに相当する。

ここで、注意すべき点は、この制約条件を導入することで補強材をリアルに表現していないので、補強材の強度や剛性などを必要としないことである。

次節では、この制約条件を用いた計算例を示し、その時の破壊のメカニズムについて考察する。

3.3 数値計算例

(1) ジオテキスタイルによる補強土

図-8に示すような境界条件で安定解析を行う。

無補強時の安全率は、2.43である。この地盤に対して30cm毎に長さ8.0mのジオテキスタイルを敷設した地盤を想定して安定解析を行う。変位速度場を図-9に、その時の全応力分布を図-10に示す。図-9の変位速度場をみると、無補強地盤では円弧すべり的な破壊をしており、補強土地盤では地盤は補強材により拘束され一体化して重力擁壁的な挙動を示して破壊している。図-10の全応力分布図では、無補強時には応力集中は起こっていないが、補強土地盤では補強材部分で応力集中が起こり安定性が増し、安全率は2.83に増加している。

表-1 土質条件

	C (kPa)	ϕ (°)	γ (kN/m ³)
粘性土地盤	19.67	0.0	17.64
砂質土地盤	5.00	10.0	18.60

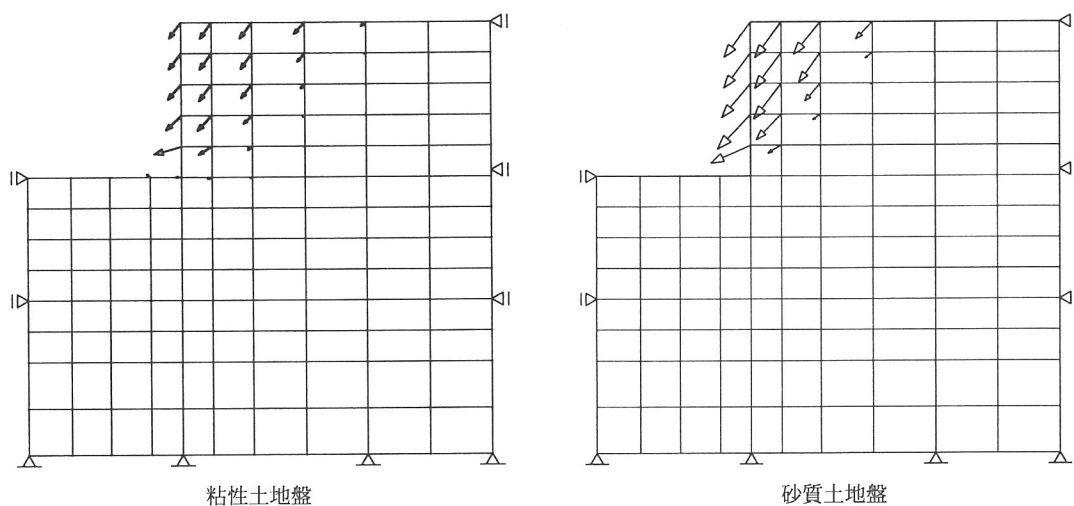


図-11 素堀掘削時の変位速度場

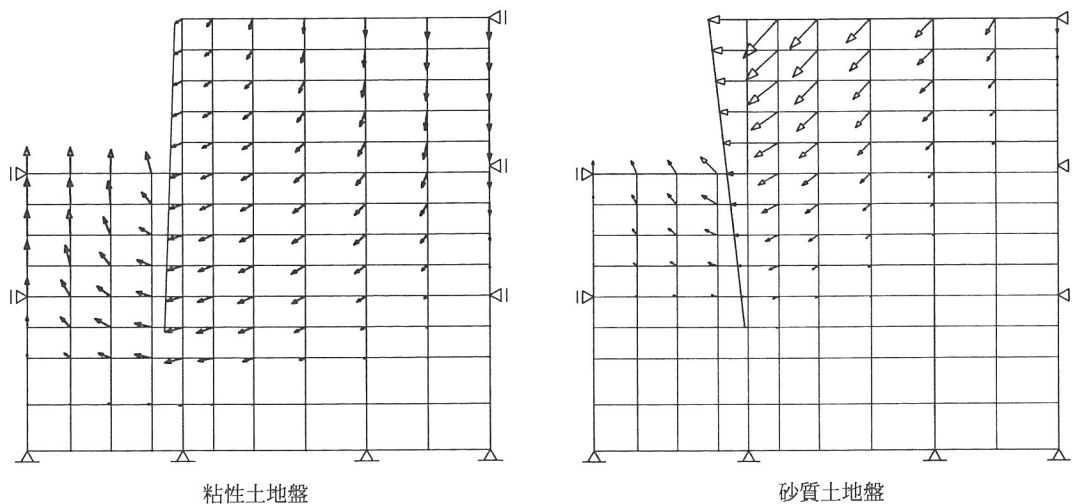
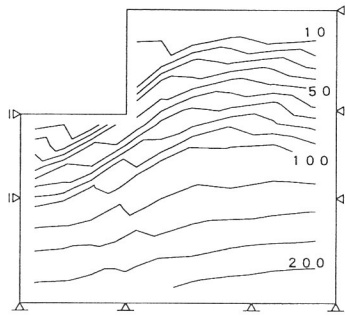


図-12 自立式土留め掘削（根入れ5 m）の変位速度場

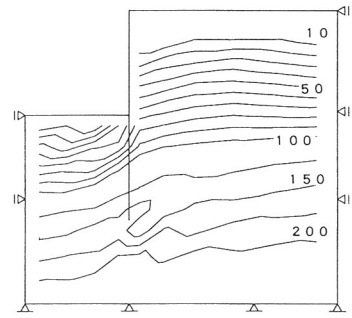
(2) 自立式土留め壁による掘削安定

粘性土地盤および砂地盤での自立式土留めによる掘削の安定解析を行う。それぞれの土質条件を表-1に示す。ここでは、土留め壁は先程から述べている補強材に相当し、土留め壁の存在する位置に「距離、角度

「不変条件」を適用する。図-11は、それぞれの素掘時の変位速度場である。この境界条件で土留め壁の根入れを2～6 mの場合について計算した。図-12に根入れ5 mの場合の変位速度場を示す。

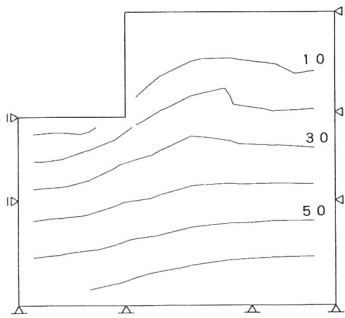


素掘掘削 安全率：1.141

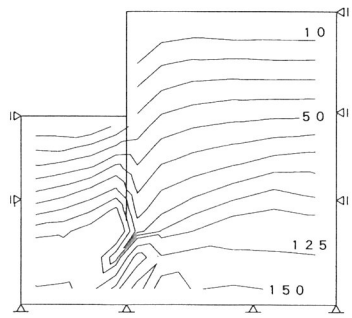


自立式土留め壁掘削（根入れ5m）

粘性土地盤



素掘掘削 安全率：0.661

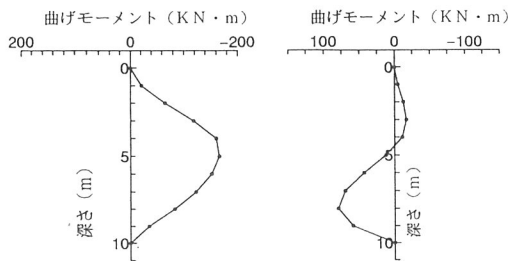


自立式土留め壁掘削（根入れ5m）

（単位：kPa）

砂質土地盤

図-13 破壊時の平均応力分布



粘性土地盤

砂質土地盤

図-14 曲げモーメント図

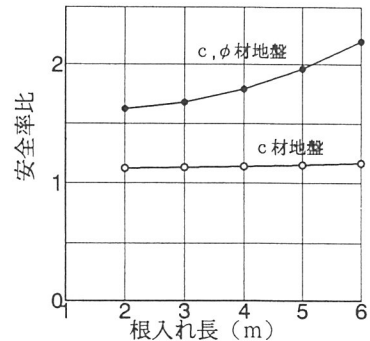


図-15 根入れ～安全率

図-13にその時の全応力分布を示す。砂地盤の場合、土留め下端に拘束圧が集中するために、下端を支点とする破壊モードとなっている。また、粘性土地盤の場合は、ヒービングのような破壊モードとなっている。

また、図-14はその時のモーメント図である。

図-15は、素掘時の安全率を1.0とした時の根入れ長さと安全率の関係を示している。この図からも分る

ように粘性土地盤の場合、根入れ長を深くしても安全率の増加は見込めず、根入れ長決定の設計計算においても粘土地盤の場合、根入れ長決定できないといった事実と一致している。上で述べた変位速度場、全応力分布、曲げモーメント、安全率はすべて同時に求められることをここでもう一度記しておく。

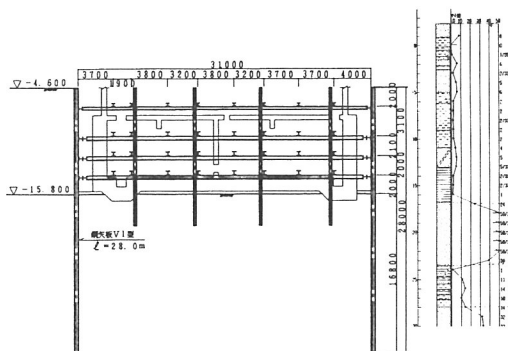


図-16 掘削断面および土質柱状図

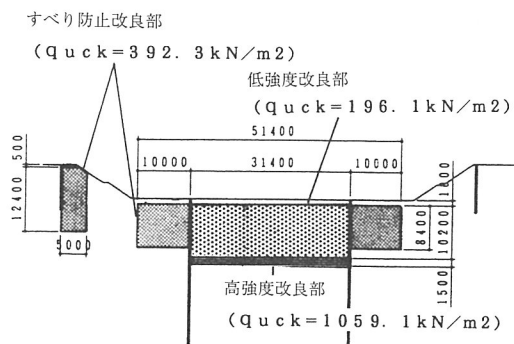


図-17 地盤改良施工断面図

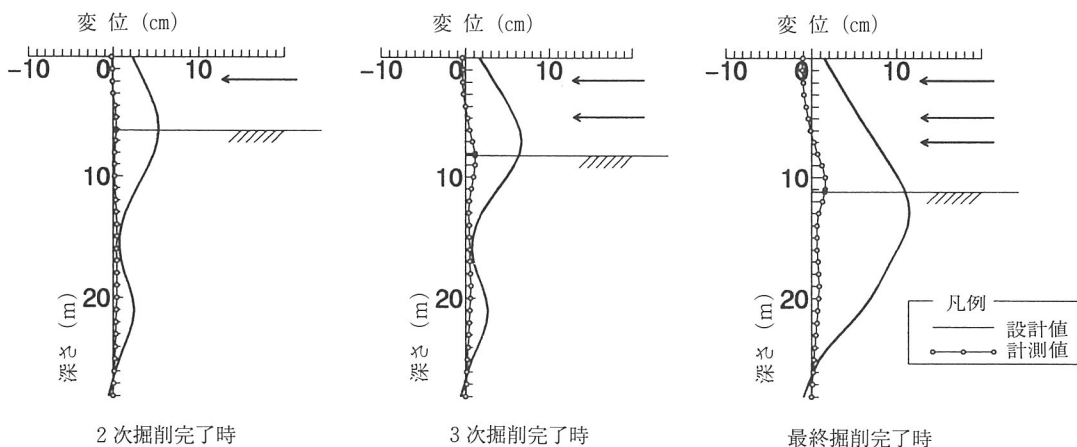


図-18 土留め壁変位図

(3) 「金沢市臨海水質管理センター建設工事」 における土留め掘削時の安定解析

当工事の概要については、当社の技術レポート⁵⁾ (1993) に詳しく述べられているので、ここでは図-16 に土質柱状図と掘削断面図のみを示しておく。土質柱状図をみても判るように、当工事は、軟弱地盤における大規模な掘削であり、地盤改良を施工した後、計測管理による掘削が行われた。地盤改良位置を図-17に示す。その時の2～4次(最終)掘削完了時における

土留めの変形図を図-18に示す。図中の設計値は弾塑性法による結果である。また、その時の切梁軸力を表-2に示す。いずれの場合も変形量は、きわめて小さいものの切梁軸力は、設計値を大きく上回っている。しかし、この状況から、変形が小さいので、切梁支保工を補強すれば安全であるのか、あるいは軸力が大きくなっているから危険とみるのか、明確に判断することは不可能である。こうした不測の現象が生じた場合の常套手段として土留めの逆解析手法により、作用して

表-2 切り梁軸力比較表

(単位：kN/m)

	設 計 値	2 次 掘 削	3 次 掘 削	4 次 掘 削
1 段 梁	1 5 5.7 3	2 2 8.5 0	3 9 5.2 1	3 4 3.2 3
2 段 梁	4 0 8.1 5	—	1 8 1.4 2	2 0 8.8 8
3 段 梁	4 6 8.6 6	—	—	1 0 1 4.0 1

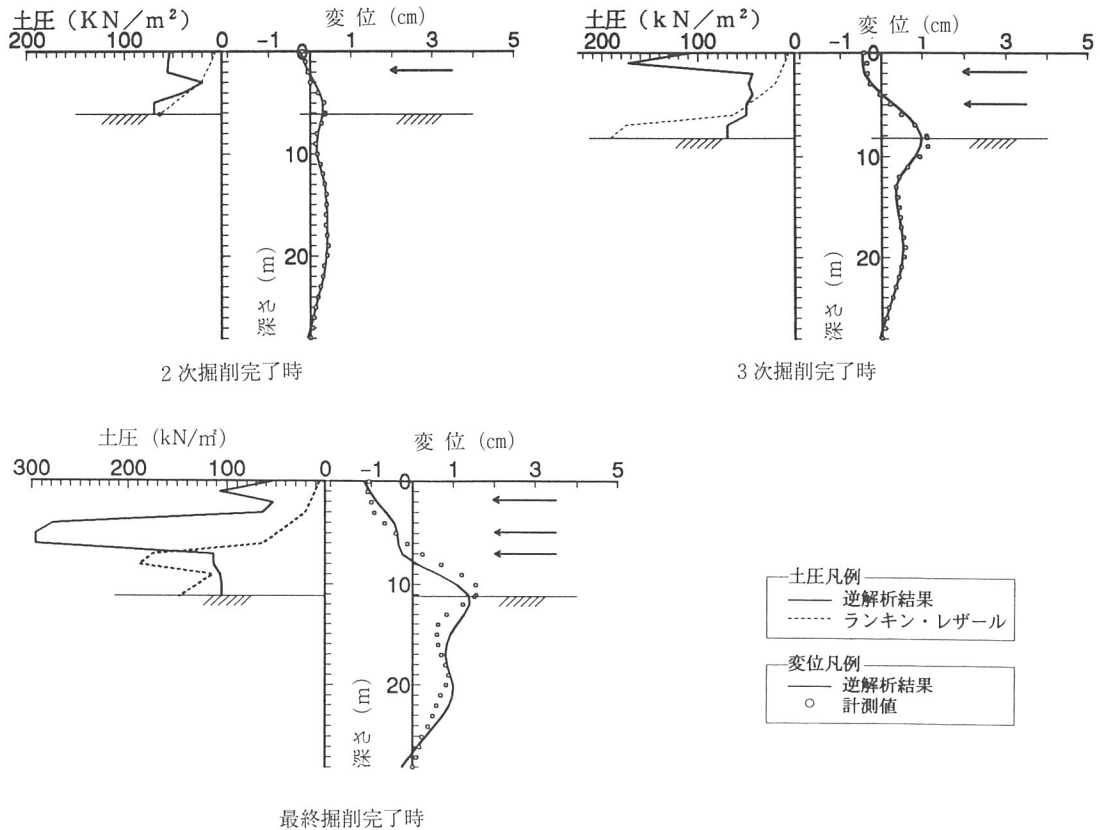


図-19 逆解析による土圧分布

いる土圧を逆解析⁶⁾する。根入れ部分の変形量が小さいことから、ここで重要となるのは掘削面より上の土留め背面の部分であると考えられるので、主働土圧部分についての逆解析による解析結果を図-19に示す。逆解析の結果から、土留め上部に大きな土圧が作用していることが、確認できる。現場施工においては、現状を把握することは非常に重要なことではあるが、そうした不規則な土圧の発生を事前に解明できれば非常に有効である。ここでは、剛塑性有限要素法を

用いて本工事における、土留め掘削の安定のメカニズムを考察する。まず、次の2ケースについて解析を行う。

ケース1：土留め壁のない素掘りの場合。

ケース2：剛性が無限大の土留め壁があると仮定し、土留め壁部に「角度不変条件」を適用した場合。

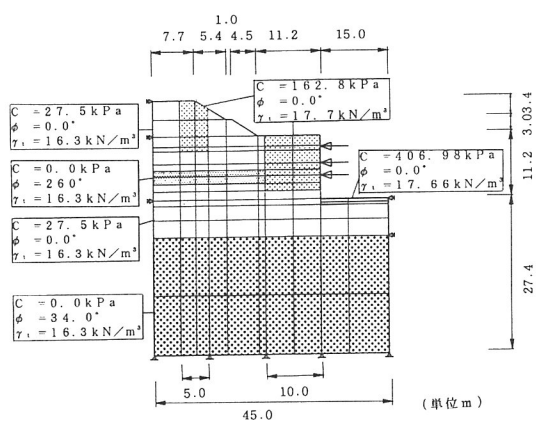


図-20 解析メッシュおよび土質条件

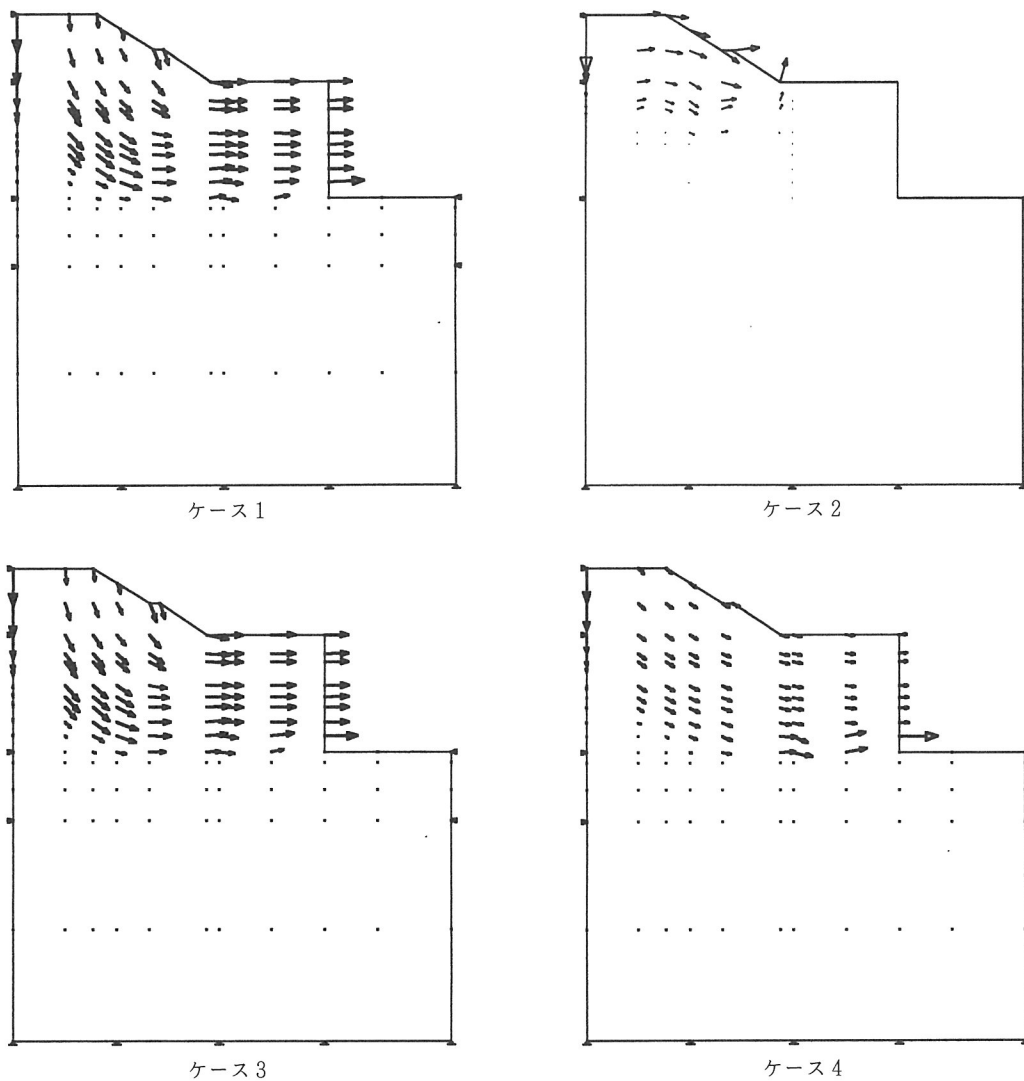
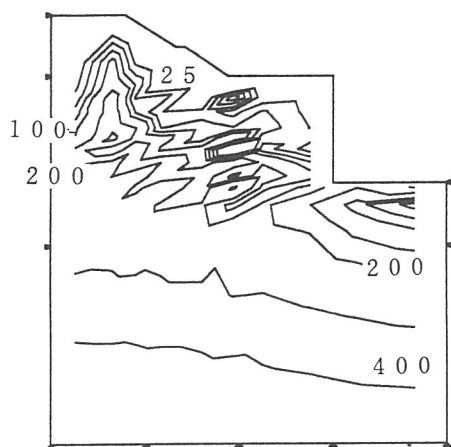
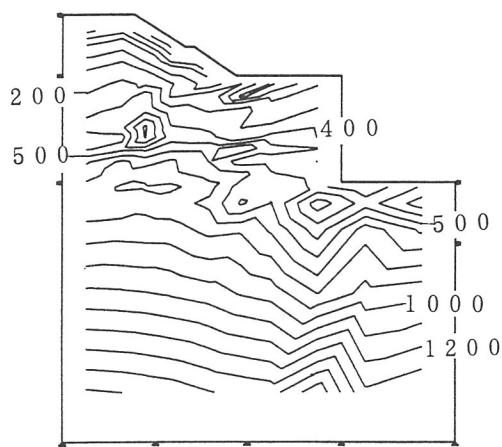


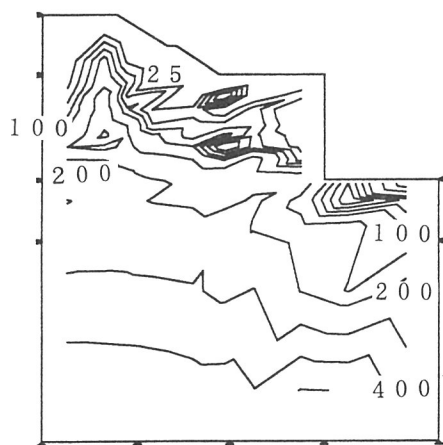
図-21 変位速度場



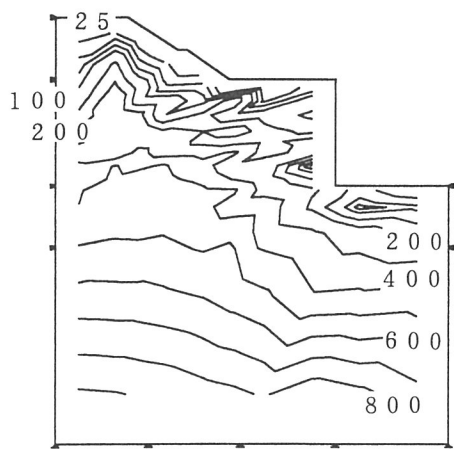
ケース 1



ケース 2



ケース 3



ケース 4

図-22 破壊時の平均応力分布図

解析に用いた境界条件を図-20に示す。解析結果については、変位速度場を図-21に、その時の平均応力分布を図-22に示す。また、表-3に各ケースにおける安全率を示した。

図-21でみる限り、土留め壁の設置により安全率は飛躍的に増大し、かつ掘削部では崩壊は発生せず剛体的に安定していることが分かる。すなわち、剛性が無限に大きい土留め壁を設置できれば、切梁がなくとも十分安定すると考えられる。しかし、この条件の解析で得られる土留め壁部の曲げモーメント（すなわちこの安全率を得るため土留め壁部に要求される抵抗モーメント）は最大で約750tf・mであり、実測の変形量から予測される最大の曲げモーメント約50tf・mと比べ

表-3 各ケースにおける安全率

ケース 1	1.00
ケース 2	3.42
ケース 3	1.01
ケース 4	1.91

るとかなりの隔たりがある。これは、計算上の重力場が3.42G（安全率）であることを考慮しても大きな値である。そこで、極端な条件ではあるが次の2ケースを追加して解析した。

ケース3：土留め壁が剛性のない柔らかいものとして「距離不変条件」のみを適用した場合。

ケース4：ケース3の条件に加えて計測より得られた切梁軸力を作用させた場合。

ケース3のように土留め壁に曲げ剛性が無い場合は、安全率、塑性流れ（変位速度場）とも素掘りの場合とほとんど変わらない。ケース3では切梁部に切梁軸力として計測値を外力として与えたのであるが、ケース2に比して安全率は約2倍の1.90に増加した。しかし、塑性流れは全体的に小さく抑えられたものの、斜面上部からの塑性流動を依然として土留め壁が受け止めることになっており、このケースの場合、あくまで予想であるが、土留め壁は大きな変形を受けることになるだろう。

さて、ここで現場の状況と上記の解析パターンと照らし合わせてみる。現場の実測では土留め壁部に変形はほとんど起らなかったと報告されていることを考慮すると、塑性流れのパターンから判断する限り、ケース2の場合に相当するものと考えてよい。しかし、実際の土留め壁の剛性は無限大では無いので、解析値のように大きな曲げ抵抗は発揮できないために、それを補うために現場では切梁部にかなり大きな軸力が発生したのではないかと考えている。いずれにせよ、最終掘削時において、切梁支保工が安全であったとすれば、地盤の安全率は1.9～3.4の間にあったということができ、極めて安全な工事であったことがわかる。

4. まとめ

本報告では、極限定理に基づく剛塑性有限要素法を紹介し、種々の地盤における安定解析の適用について述べた。さらに、「距離不変条件」「角度不変条件」を導入した解析手法の定式化を行い、補強材により補強された地盤の安定解析を行った。まだまだ発展途上であるが、この手法を用いることで、補強材の曲げモーメント、軸力、変位速度場、応力場、安全率（支持力）などを同時に求めることができることを示した。また、地盤の破壊（安定）のメカニズムを明確にできるので、効果的な地盤改良の方法についても検討可能である。

最後に、本報告書を作成するにあたり御指導を賜りました名古屋大学 浅岡顕教授、松尾稔教授、小高猛司助手に深く感謝の意を表します。

〔参考文献〕

- 1) Tamura, T., Kobayashi, S. and Sumi, T.
"Limit analysis of soil structure by rigid plastic finite element method". Soil and Foundation, Vol24, No.1, pp 34-42, 1984
- 2) Asaoka, A., and Kodaka, T.
"Bearing capacity of foundations on clays by the rigid plastic finite element model"
In Proc. of 4th International Symposium on Numerical models in Geomechanics (NUMOG IV), pp 839-849, Swansea U.K., 1992.
- 3) Asaoka, A., and Kodaka, T.
"Analysys of seepage failure of sandy soils, a coupling problem aproach". In proc. of 7th International Conferense on Computer Methods and Advances in Geomechanics, pp 436-468, Cairns, 5 1991
- 4) Asaoka, A., Kodaka, T. and Pokharel, G
"Stability analysis of reinforced soils structures using rigid plastic finite element method". Soil and Foundations, 34(1): pp 107-108, 1994
- 5) 杉本頼昭、二宮作太郎、"被圧滞水層を抱えた軟弱地盤における大規模掘削"、(株)浅沼組土木本部 土木技術企画部技術レポート、No17: pp77-98
- 6) 高見 邦幸、橋本 正、岩崎 好規、岸尾 俊茂、
"最適化手法による土留め壁の逆解析"、土木学会第47回年次学術講演会概要集, pp940-941, 1992